IZ NASTAVNE PRAKSE

Pojam sličnosti u nastavi matematike u osnovnoj školi*

Boris Čulina[1], Gordana Paić[2], Željko Bošnjak[3]

Ključne riječi: *pojam sličnosti, nastava matematike, sličnost u fizici, opseg i površina kruga, radijanska mjera kuta*

Pojam sličnosti geometrijskih figura i tijela jedan je od temeljnih pojmova euklidske geometrije po kojemu se ona bitno razlikuje od ostalih homogenih i izotropnih geometrija, npr. sferne i hiperboličke geometrije. Upravo svojstva sličnosti daju euklidskoj geometriji njenu karakterističnu jednostavnost, ljepotu i upotrebljivost. S obzirom na takav značaj, smatramo da pojam sličnosti nije odgovarajuće zastupljen u matematičkoj izobrazbi osnovnoškolaca. U članku je predložena skica duž koje se, vjerujemo, pojam sličnosti može ukomponirati u gradivo sedmog razreda, a da ga pritom ne optereti, štoviše, da ga učini jednostavnijim i relevantnijim.

U gradivu sedmog razreda obrađuju se proporcionalnost i Talesov poučak o proporcionalnim dužinama, između ostalog i kao priprema za uvođenje pojma sličnosti. Međutim, sam pojam sličnosti definira se nepotrebno ograničeno, samo za trokute, i to na način koji skriva osnovnu bit toga pojma. Obično se definira da su trokuti slični ako imaju odgovarajuće kutove jednakih veličina. Takva definicija sugerira da je sličnost povezana s očuvanjem oblika jer je oblik trokuta određen njegovim kutovima, ali se rijetko ide dalje od same sugestije. Umjesto toga, ovdje se predlaže posebna lekcija u kojoj bi se učenik upoznao s općim pojmom sličnosti zajedno sa značajnim geometrijskim svojstvima sličnosti, a sličnost trokuta bi tada bila samo specijalan slučaj općeg pojma sličnosti likova. Tako uveden pojam sličnosti može se upotrijebiti za bolje razumijevanje kružnica (sve kružnice su slične) kao i formula za opseg i površinu kruga. Pomoću njega se može jednostavno uvesti i radijanska mjera kuta. Pojam sličnosti ima i jednostavne izvanmatematičke primjene jer su s duljinama, površinama i volumenima likova povezane razne fizikalne veličine.

---

*Predavanje održano na 6. kongresu nastavnika matematike RH, 2014. godine u Zagrebu

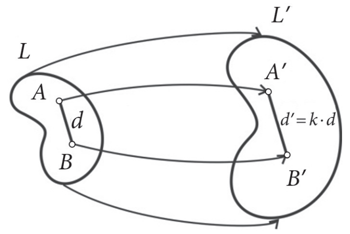
[1]Boris Čulina, Veleučilište Velika Gorica, Velika Gorica
[2]Gordana Paić, OŠ Dr. Ivan Merz, Zagreb
[3]Željko Bošnjak, OŠ Pavleka Miškine, Zagreb

Poucak 65.indd 47 24.4.2016. 21:42:36

Predlažemo da se pojam sličnosti uvede na primjeru istih konstrukcija pomoću raznih jedinica mjere. Npr. nastavnik na ploči može konstruirati pravokutnik sa stranicama duljina 6 dm i 4 dm, a učenik u bilježnici provede istu konstrukciju sa stranicama duljina 6 cm i 4 cm. Konstrukcije su istovjetne osim u izboru jedinice mjere (jedna je 10 puta veća od druge). Dobiveni likovi imaju isti oblik a različite dimenzije. Lako se eksperimentiranjem ili računanjem uvjeriti da je, kad izaberemo bilo koje dvije točke A i B na pravokutniku na ploči (npr. par nasuprotnih vrhova) i odgovarajuće dvije točke A' i B' u bilježnici, udaljenost d točaka A i B deset puta veća od udaljenosti d' točaka A' i B'. Isto je i s opsegom i s bilo kojom drugom duljinom. Broj 10 je faktor povećanja duljina u jednom liku da bismo dobili odgovarajuće duljine u drugom liku. Analiziramo li površine pravokutnika, lako dobijemo da je površina pravokutnika na ploči $10^2 = 100$ puta veća od površine pravokutnika u bilježnici. Lako se možemo uvjeriti računanjem da je tako i sa svakom drugom površinom (recimo površinom trokuta kojemu je jedan vrh ujedno i vrh pravokutnika, a druga dva vrha su polovišta stranica pravokutnika koje izlaze iz prvog vrha). Ako prijeđemo na kvadre u prostoru dimenzija, npr. 6 dm × 4 dm × 3 dm odnosno 6 cm × 4 cm × 3 cm, možemo se uvjeriti računanjem da veći kvadar ima $10^3 = 1\,000$ puta veći volumen.

Ova razmatranja mogu se provesti i s konstrukcijama drugih likova, trokuta, mnogokuta, kružnica... Važno je uvijek istaknuti da slične likove konstruiramo na isti način, samo koristimo drugu jediničnu dužinu. To navodi učenika da prihvati sljedeću definiciju sličnosti koja odražava osnovnu intuiciju da su likovi slični ako su istog oblika (ista konstrukcija), tj. proporcionalnih dimenzija (različit izbor jedinične dužine).

Definicija sličnosti. *Za dva geometrijska lika kažemo da su slična ako možemo povezati točke jednog lika s točkama drugog lika tako da vrijedi sljedeće: udaljenosti točaka u jednom liku jednake su udaljenostima odgovarajućih točaka u drugome liku pomnoženim uvijek istim brojem. Taj broj nazivamo* ***koeficijent sličnosti*** *jednog lika s drugim likom:*

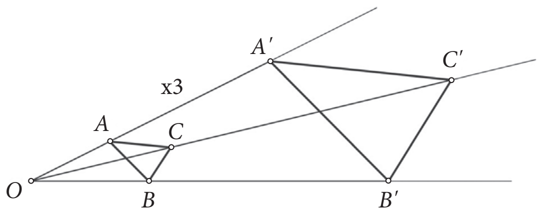


Ne samo da su duljine u jednom liku k puta veće nego odgovarajuće duljine u drugome liku, već je na osnovi uvodnih razmatranja prihvatljivo poopćiti i da su površine u jednom liku za k^2 puta veće od odgovarajućih površina u drugom liku, a volumeni, ako je lik prostoran, za k^3 puta veći od odgovarajućih volumena u drugom liku. Specijalno to vrijedi za ukupan opseg, površinu i volumen sličnih likova L i L': $o' = ko$, $p' = k^2p$, $V' = k^3V$.

Poucak 65.indd 48 24.4.2016. 21:42:36

Iz definicije jednostavno slijedi da su omjeri duljina stranica (površina, volumena) u jednom liku jednaki omjerima duljina odgovarajućih stranica (površina, volumena) u sličnom liku. Npr. za duljine *a'* i *b'* jednog lika koje odgovaraju duljinama *a* i *b* u liku kojemu je on sličan s koeficijentom sličnosti *k* vrijedi: $a' = ka$, $b' = kb$. Podijelimo li ove jednakosti, dobit ćemo: $a'/b' = a/b$.

Usvajanje pojma sličnosti može se „ojačati" preciziranjem intuitivne ideje da slične likove dobivamo povećanjem, odnosno smanjenjem lika. Teren za ovakvu formulaciju pripremljen je Talesovim poučkom o proporcionalnim dužinama. Formulaciju možemo uvesti na jednostavnom primjeru trokuta (što je ujedno priprema za analizu sličnosti trokuta). Nacrtamo trokut na ploči (u bilježnici), izaberemo jednu točku *O* izvan trokuta (radi preglednosti), svaki vrh trokuta udaljimo recimo tri puta od točke *O* i spojimo dobivene vrhove:



Bilo eksperimentalno, mjerenjem, ili računski, korištenjem Talesova poučka o proporcionalnim dužinama učenici se mogu uvjeriti da smo uvećanjem dobili sličan lik. Isti postupak može se ponoviti i s drugim likovima, s raznim faktorima povećanja (smanjenja). Mogu se koristiti i zaobljeni likovi, samo treba preslikati više točaka. Posebno, učenik se može uvjeriti da će uvećanjem (smanjenjem) kružnice dobiti opet kružnicu. Naravno, faktor povećanja ($k > 1$) odnosno smanjenja ($0 < k < 1$) upravo je koeficijent sličnosti. Na ovaj se način učenik upoznaje s osnovnom transformacijom sličnosti (uvećanjem, odnosno umanjenjem, u matematičkom rječniku: dilatacijom ili homotetijom) i usvaja drugu karakterizaciju pojma sličnosti.

transformacijska karakterizacija pojma sličnosti: *Dva su lika slična ako uvećanjem ili umanjenjem jednog lika dobijemo lik koji je sukladan drugom liku.*

Odnosi duljina, površina i volumena u sličnim likovima imaju jednostavne i značajne posljedice za oblike u prirodi i tehnici, jer su mnoge fizikalne veličine proporcionalne duljinama, površinama i volumenima. Takvi su primjeri učenicima obično zanimljivi, a ujedno na jedan kvalitetan način povezuju gradivo raznih predmeta. Npr. nismo slučajno ovakvih dimenzija. Ne možemo u ovom obliku biti ni puno veći (divovi, prema Gulliverovoj priči visoki kao crkveni zvonici) ni puno manji (Liliputanci, prema Gulliverovoj priči visoki oko 6 palaca). Naime, naša je težina proporcionalna volumenu, a pritisak koji mogu podnijeti kosti, njihovom poprečnom presjeku. Tako kad bi čovjek porastao do visine crkvenog zvonika, odnosno postao recimo 10 puta veći, težina bi mu bila $10^3 = 1\,000$ puta veća, a površina presjeka bedrenih kostiju samo $10^2 = 100$ puta veća. Tako bi kosti bile izložene 10 puta većem naprezanju (kao da deset ljudi nosi na sebi) i polomile bi se. Još gore. Zagrijavanje tijela kod toplokrvnih živih bića proporcionalno je volumenu, a hlađenje je proporcionalno površini tijela. To znači da bi se kod navedenog povećanja čovjek 1 000 puta jače zagrijavao, a samo 100 puta jače hladio. Dakle deset bi se puta više zagrijavao nego hladio, pa bi „pregorio". Naravno, ovakva povećanja i smanjenja u nekoj su mjeri i uz određene izmjene karakteristika organizma moguća. Većim životinjama lakše je zadržati temperaturu, a manjima teže. Jedna vrsta prilagodbe je da veće životinje trebaju sporije raznošenje energije po tijelu, pa imaju manji broj otkucaja srca u minuti, dok manje životinje imaju veći broj otkucaja srca u minuti. Tako npr. ptice imaju od 100 (golub) pa čak do 1 000 (kanarinac) otkucaja u minuti, dok veće životinje imaju od 40 (konj) do 20 (kitovi) otkucaja u minuti.

Nakon predložene obrade općeg pojma sličnosti, sličnost trokuta može se uvesti kao specijalan slučaj sličnosti geometrijskih likova. Učenik s usvojenim općim pojmom sličnosti ne bi trebao imati problema s razumijevanjem poučaka sličnosti. Poučci se mogu dokazati na učenicima prihvatljiv način iz definicije sličnosti i transformacijske karakterizacije sličnosti, pomoću Talesova poučka o proporcionalnim dužinama, ali možda je bolje izbjeći dokazivanje. Isto tako, odnosi opsega i površina sličnih trokuta ne moraju se posebno razmatrati jer su sada ti odnosi samo specijalni slučaj već razmatranih odnosa opsega i površina sličnih likova. Na taj način vrijeme odvojeno za uvođenje općeg pojma sličnosti može se kompenzirati manjim vremenom potrebnim za obradu sličnosti trokuta.

Pojam sličnosti može se iskoristiti u sedmome razredu i za motiviranje i djelomično objašnjenje formula za opseg i površinu kruga. Naime, sve kružnice slične su jediničnoj kružnici. U danom izboru mjere dužine, kružnica radijusa r slična je jediničnoj kružnici s koeficijentom sličnosti r. Tako, prema svojstvima sličnosti, ona ima r puta veći opseg od jedinične kružnice i r^2 puta veću površinu. Dakle, ako su opseg i površina jediničnog kruga o_1 i p_1 (nepoznate konstante), tada su opseg o_r i površina p_r kruga radijusa r upravo

$$o_r = ro_1, \quad p_r = r^2p_1$$

Dakle, opseg je proporcionalan radijusu kruga, a površina kvadratu radijusa kruga. Da bismo našli nepoznate konstante proporcionalnosti, opseg i površinu jediničnog kruga, možemo se poslužiti sljedećim razmišljanjem. Zbog sličnosti svih kružnica omjer opsega i promjera uvijek je isti broj koji ćemo nazvati π:

$$\pi = \frac{o_r}{2r}\ .$$

Učenicima se može napomenuti da se približna vrijednost broja π može odrediti tako da upišemo kružnici pravilni mnogokut sa što većim brojem stranica i izračunamo njegov opseg o_{rn}. Tad je π približno $\frac{o_{rn}}{2r}$ i aproksimacija je to bolja što je n veći broj.

Iz ovakve definicije broja π (koja je zasnovana na pojmu sličnosti) slijedi da je opseg jedinične kružnice 2π, a opseg kružnice radijusa r:

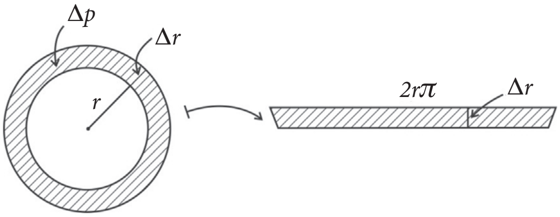
$$o_r = 2r\pi.$$

Poucak 65.indd 50 24.4.2016. 21:42:36

U formuli za površinu kruga $p_r = r^2 p_1$ možemo odrediti nepoznatu konstantu p_1 na učeniku prihvatljiv način ispitujući za koliko je povećanje Δp_r površine kruga kad mu se radijus poveća za Δr. Prema prethodnoj formuli je

$$\Delta p_r = (r+\Delta r)^2 p_1 - r^2 p_1 = (2r\Delta r + (\Delta r)^2) p_1 \approx 2r\Delta r p_1$$

S druge strane, povećanje površine je tanki kružni vijenac koji je približno jednak $\Delta p_r \approx 2r\pi\Delta r$:

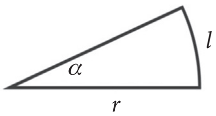


Izjednačavanjem ovih dvaju (približnih) izraza za Δp_r otkrit ćemo površinu jediničnog kruga: $p_1 = \pi$. Tako je površina kruga radijusa *r* jednaka

$$p_r = r^2\pi .$$

Naravno, egzaktniji izvod ove formule zahtijevao bi da uključimo u razmatranje i zanemarene članove u kojima je prisutan $(\Delta r)^2$ što bi bilo, vjerujemo, previše na ovoj razini matematičkog obrazovanja.

Iz sličnosti svih kružnica možemo jednostavno dobiti i radijansku mjeru kuta koja se prema današnjem planu uvodi tek u trećem razredu srednje škole. Naime, iz sličnosti kružnica slijedi da je za dani kružni isječak određen kutom α omjer duljine *l* pripadajućeg luka i radijusa *r* uvijek isti broj.



Lako se vidi da je taj broj aditivna mjera kuta. Dakle, prirodno je kut mjeriti omjerom luka i radijusa pripadajućeg kružnog isječka, odnosno, u danoj jedinici mjere dužine, duljinom pripadajućeg luka jedinične kružnice, tzv. **radijanskom mjerom kuta**:

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Iz ovoga jednostavno slijedi da je mjera punog kuta jednaka 2π. Također slijedi i transformacijska formula pretvorbe mjere kuta u stupnjevima u mjeru kuta u radijanima: $180° = \pi$ radijana. Isto tako, u ovoj mjeri kuta dobivamo jednostavnu formulu za luk: $l = r\alpha$.

Napominjemo da je ovim radom samo ocrtan jedan prijedlog izmjene nastavnog plana za osnovnu školu za koji smatramo da je vrijedan daljnje diskusije i metodičke razrade.

Poucak 65.indd 51 24.4.2016. 21:42:37