Grafičko rješavanje sustava jednadžbi s apsolutnim vrijednostima

Danka Jelenčić[1], Maja Starčević[2]

Grafički način rješavanja sustava jednadžbi u nastavi prvi put uvodimo kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Ukoliko nam je zadan sustav od dvije (ili više) linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice, znamo da sve točke koje zadovoljavaju neku od tih jednadžbi u koordinatnom sustavu čine pravac. Dakle, sustav se može riješiti i tako da se nacrtaju svi pripadni pravci toga sustava. Točka u kojoj se svi pravci sijeku predstavlja rješenje sustava. Ako se svi pravci podudaraju, imamo beskonačno mnogo rješenja, a ako ne postoji točka u kojoj se svi pravci sijeku (bez obzira sijeku li se neki od parova pravaca), tada sustav nema rješenja.

Sličan pristup rješavanju sustava želimo primijeniti i kod sustava jednadžbi s apsolutnim vrijednostima. Sustavi jednadžbi s apsolutnim vrijednostima obično se smatraju težim školskim gradivom. Razlog leži u činjenici da se njihovo rješavanje algebarskim putem temelji na razlaganju na slučajeve. Potrebno je prepoznati slučajeve koji će se promatrati, u svakom od slučajeva svesti jednadžbe na jednostavnije te odrediti koji od dobivenih rezultata uistinu odgovara promatranom slučaju, odnosno rješenju zadanog sustava. Međutim, jednadžbe se i kod takvih sustava mogu ponekad opisati krivuljama, te ako prepoznamo o kojim se krivuljama radi, pripadne sustave možemo riješiti i grafički. Naravno, grafičko rješavanje ne moramo izostaviti ukoliko se odlučimo za algebarski način rješavanja sustava. Grafičkim prikazom jednadžbi možemo provjeriti rješenje. Kod nekih sustava možemo kombinirati grafički i algebarski pristup rješavanju.

Za početak pogledajmo jednadžbu oblika

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left|a_i x + b_i\right| - y = 0,$$

gdje su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i, c_i \neq 0$ za $i = 1..., n$.

Pripadna krivulja odgovara grafu funkcije

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left|a_i x + b_i\right|.$$

[1]Danka Jelenčić, Srednja škola Ludbreg, Ludbreg
[2]Maja Starčević, PMF – Matematički odsjek, Zagreb

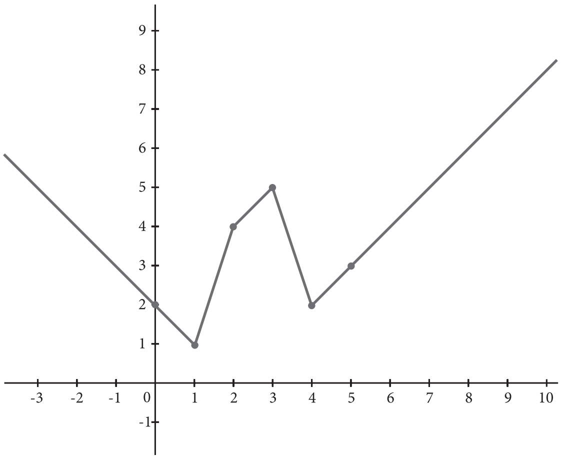
Neka je $d_i = -\frac{b_i}{a_i}$, $i = 1\dots, n.$ Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su zagrade u izrazu funkcije poredane tako da je $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$. Ako za neki $i \in \{1\dots, n-1\}$ vrijedi $d_i < d_{i+1}$, raspisivanjem izraza mogli bismo zaključiti da se za $x \in [d_i, d_{i+1}]$ funkcija f ponaša kao linearna funkcija. Graf funkcije je neprekidan, a u točkama d_i, $i = 1\dots, n$ može doći do promjene u nagibu grafa. Za crtanje grafa funkcije na intervalu $[d_1, d_n]$ dovoljno je stoga odrediti vrijednosti $f(d_i)$, $i = 1\dots, n$ te konstruirati dužine s krajnjim točkama $(d_i, f(d_i))$ i $(d_{i+1}, f(d_{i+1}))$, $i = 1\dots, n - 1$. Kako se i za $x < d_1$ i $x > d_n$ funkcija ponaša linearno, ostale dijelove grafa dobivamo tako da odredimo proizvoljne d_0 i d_{n+1} takve da vrijedi $d_0 < d_1$ i $d_{n+1} > d_n$ te konstruiramo polupravce s početnim točkama $(d_1, f(d_1))$ i $(d_n, f(d_n))$ koji redom prolaze točkama $(d_0, f(d_0))$ i $(d_{n+1}\ f(d_{n+1}))$.

Primjer 1. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = 2|x-4| - |x-2| + |2-2x| - 2|-x+3|$.

Rješenje.

Primijetimo prvo da je $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 4$ te da je $f(d_1) = 1, f(d_2) = 4,$ $f(d_3) = 5$ i $f(d_4) = 2.$

Sada odaberemo $d_0 = 0$ i $d_5 = 5$ te imamo $f(d_0) = 2$ i $f(d_5) = 3$. Prema tome graf funkcije izgleda kao na Slici 1.



Slika 1.

U nastavku ćemo proučiti još neke vrste jednadžbi te odrediti koje krivulje predstavljaju.

Prva jednadžba koju promatramo je

$$|x|+|y|=a$$

za neki $a > 0$. Odredimo skup točaka koje zadovoljavaju tu jednadžbu.

Razlikujemo četiri slučaja:

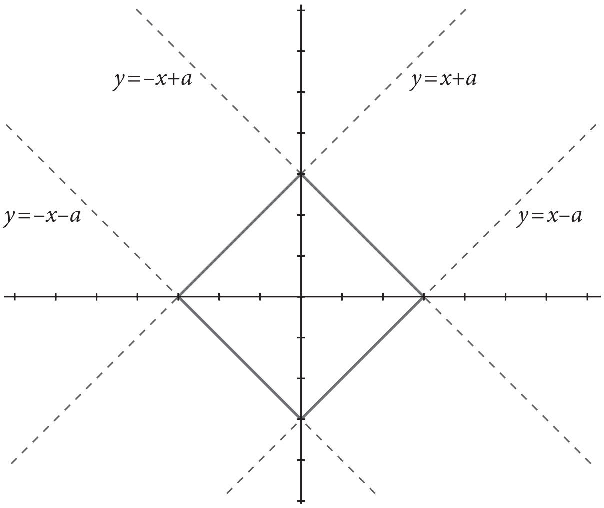
1) Ako su $x, y \geq 0$, tada jednadžba glasi $x+y=a$ pa crtamo dio pravca $y = -x + a$ koji pripada prvom kvadrantu.

2) Ako su $x, y \leq 0$, tada jednadžbu možemo pisati kao $-x - y = a$ i crtamo dio pravca $y = -x - a$ koji pripada trećem kvadrantu.

3) Za $x \geq 0, y \leq 0$ jednadžba poprima oblik $x - y = a$, odnosno crtamo dio pravca $y = x - a$ koji pripada četvrtom kvadrantu.

4) Za $x \leq 0, y \geq 0$ jednadžba glasi $-x + y = a$ te crtamo dio pravca $y = x + a$ koji pripada drugom kvadrantu.

Pogledajmo sada grafičko rješenje početne jednadžbe (Slika 2).



Slika 2.

Zaključujemo da je riječ o rubu kvadrata koji je simetričan s obzirom na osi koordinatnog sustava, s vrhovima koji pripadaju tim osima. U nastavku ćemo taj kvadrat zvati *osnovni kvadrat* s dijagonalom duljine $2a$.

Nadalje, neka je zadana jednadžba

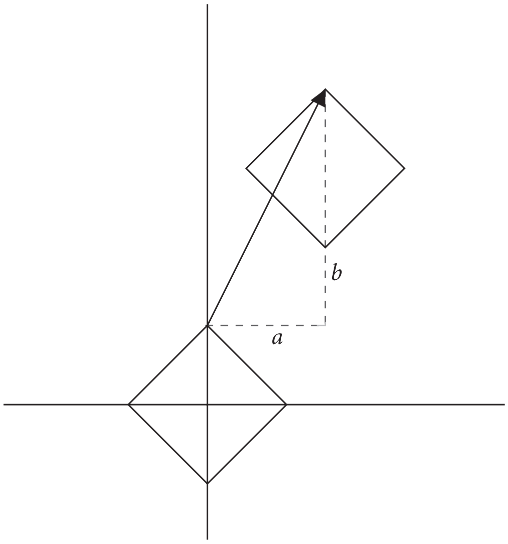
$$|x-a|+|y-b|=c,$$

za neke $a, b, c \in \mathbb{R},$ pri čemu je $c > 0$.

Koristeći supstituciju $x' = x-a, \quad y' = y-b$ dobivamo

$$|x'|+|y'|=c.$$

Svaka točka (x', y') dobivena je translacijom točke (x, y) za vektor $(-a, -b)$. Kako sve točke (x', y') za koje vrijedi $|x'|+|y'|=c$ predstavljaju rub osnovnog kvadrata čija je dijagonala duljine $2c$, zadana se krivulja dobiva translacijom tog ruba za vektor (a, b) (Slika 3).



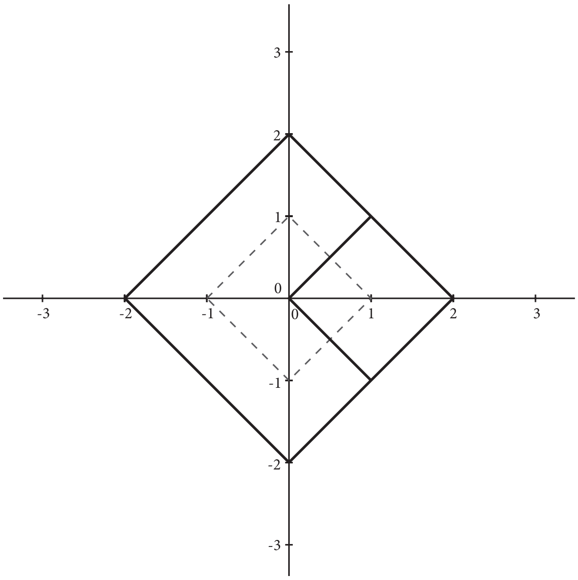
Slika 3.

Primjer 2. Riješimo sustav

$$\begin{cases} |x|+|y|=2 \\ |x-1|+|y|=1 \end{cases}.$$

Rješenje.

Prva jednadžba predstavlja rub osnovnog kvadrata s dijagonalom duljine 4, dok druga jednadžba predstavlja rub osnovnog kvadrata dijagonale duljine 2 translatiranog za vektor $(1, 0)$. Nacrtajmo rubove tih kvadrata (Slika 4).



Slika 4.

Uočavamo da presjek tih rubova čine dvije dužine koje su stranice manjeg kvadrata. Lako je očitati krajnje točke tih dužina te pomoću njih odredimo jednadžbe pripadnih pravaca. Gornja dužina pripada pravcu $y = -x + 2$, a donja pravcu $y = x - 2$.

Konačno, rješenje sustava je

$$\{(x, -x+2):\ 1 \le x \le 2\} \cup \{(x, x-2):\ 1 \le x \le 2\}.$$

Sljedeći primjer je jednadžba

$$|x+y| + |x-y| = a.$$

za $a > 0$.

Oblik pripadne krivulje možemo opet odrediti razlaganjem na slučajeve ili koristeći pogodnu supstituciju. Naime, supstitucijom

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),$$
$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$$

jednadžbu možemo zapisati kao

$$|x'| + |y'| = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Točke (x', y') pripadaju rubu osnovnog kvadrata dijagonale $\sqrt{2}a$, odnosno stranice duljine a. Koordinate (x', y') dobivene su rotacijom odgovarajućih koordinata (x, y) za kut veličine 45° u negativnom smjeru pa zaključujemo da se zadana krivulja dobiva rotacijom ruba osnovnog kvadrata stranice duljine a za kut veličine 45° u pozitivnom smjeru. Dakle, krivulja određena jednadžbom $|x+y|+|x-y|=a$ jest rub kvadrata stranice duljine a koji je simetričan s obzirom na obje osi koordinatnog sustava, a stranice su mu paralelne osima.

Primjer 3. Zadan je sustav

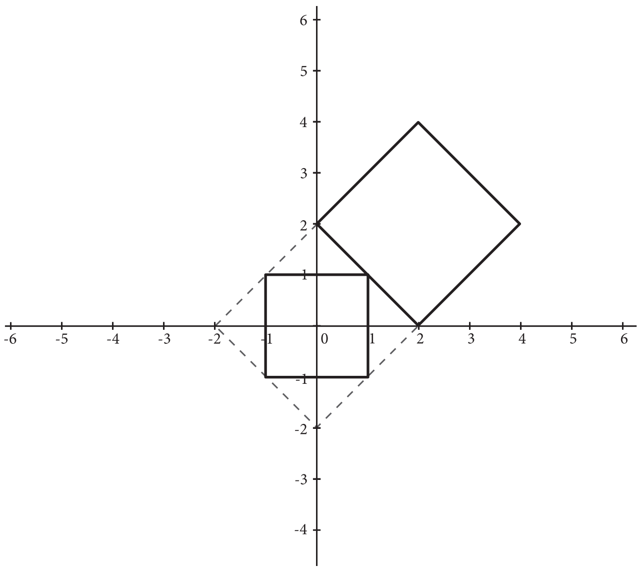
$$\begin{cases} |x-2|+|y-2|=2 \\ |x+y|+|x-y|=2 \end{cases}.$$

Rješenje.

Prva jednadžba predstavlja rub osnovnog kvadrata s dijagonalom duljine 4, translatiran za vektor (2, 2). Njegovi su vrhovi (4, 2), (2, 4), (0, 2) i (2, 0).

Druga jednadžba predstavlja rub kvadrata duljine stranice 2 čije je središte u ishodištu koordinatnog sustava, a stranice su mu paralelne s koordinatnim osima.

Nacrtajmo obje krivulje (Slika 5).



Slika 5.

Iz grafičkog prikaza vidimo da se krivulje sijeku u samo jednoj točki, odnosno rješenje sustava je uređen par (1, 1).

Primjer 4. Riješimo sustav

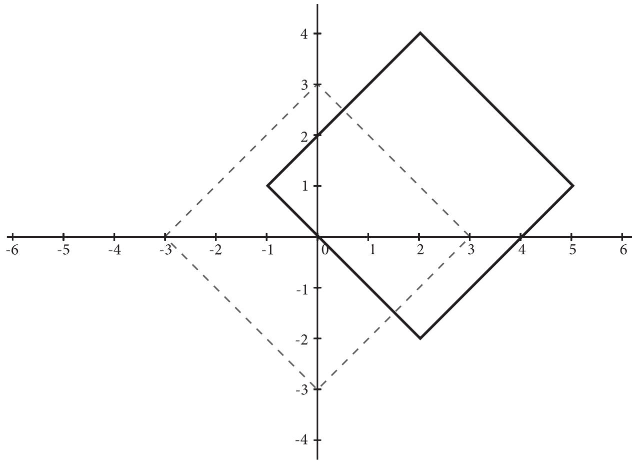
$$\begin{cases} \left||x|-2\right|+\left||y|-1\right|=3 \\ |x-6|+|x-4|+|x-3|=|y+1| \end{cases}.$$

Rješenje.

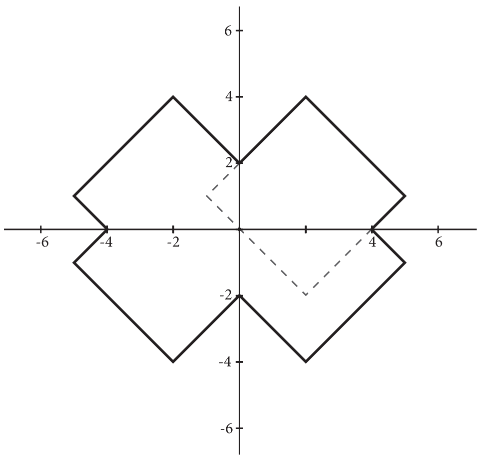
Promotrimo prvo prvu jednadžbu. Primijetimo da ako neka točka (x, y) zadovoljava jednadžbu, tada je zadovoljavaju i točke $(-x,-y)$, $(-x,y)$, $(x,-y)$. Zaključujemo da je pripadna krivulja simetrična s obzirom na koordinatne osi pa je dovoljno odrediti njezin oblik samo u prvom kvadrantu. U prvom kvadrantu koordinatnog sustava vrijedi $x, y \geq 0$ pa jednadžba poprima oblik

$$|x-2|+|y-1|=3\,.$$

To je jednadžba ruba osnovnog kvadrata dijagonale duljine 6 translatiranog za vektor (2, 1) (Slika 6). Mi promatramo samo njegov dio koji se nalazi unutar prvog kvadranta. Njega ćemo preslikati simetrično s obzirom na koordinatne osi (Slika 7).



Slika 6.



Slika 7.

Drugu jednadžbu rješavamo kroz dva slučaja:

1) Za $y \geq -1$ imamo jednadžbu

$$|x-6|+|x-4|+|x-3|=y+1.$$

Crtamo graf funkcije $f_1(x)=|x-6|+|x-4|+|x-3|-1$. Uočimo da je dovoljno ucrtati točke $(3, f_1(3))=(3,3)$, $(4, f_1(4))=(4,2)$, $(6, f_1(6))=(6,4)$ te npr. $(2, f_1(2))=(2,6)$ i $(7, f_1(7))=(7,7)$. Kako se graf nalazi iznad pravca $y = -1$, možemo zaključiti da čitav graf pripada krivulji koja opisuje drugu jednadžbu sustava.

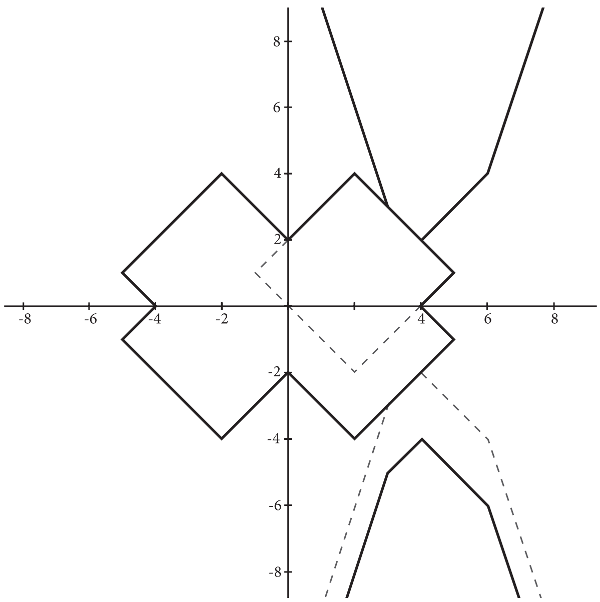
2) Za $y \leq -1$ jednadžba glasi

$$|x-6|+|x-4|+|x-3|=-y-1.$$

Crtamo graf funkcije $f_2(x)=-|x-6|-|x-4|-|x-3|-1=-f_1(x)-2$. Taj graf možemo nacrtati tako da zrcalimo graf funkcije f_1 u odnosu na x-os te dobivenu krivulju translatiramo za 2 prema dolje. Graf se nalazi ispod pravca $y = -1$ pa i on pripada traženoj krivulji.

Drugu jednadžbu dakle opisuje unija grafova funkcija f_1 i f_2.

Pogledajmo sada u koordinatnom sustavu obje krivulje koje opisuju jednadžbe zadanog sustava (Slika 8).



Slika 8.

Presjek krivulja je dužina s krajnjim točkama (3, 3) i (4, 2) pa je rješenje sustava dano s

$$\{(x,-x+6):\ 3\le x\le 4\}.$$

U nastavku ćemo izvesti jednadžbu ruba proizvoljnog pravokutnika čije su stranice paralelne s koordinatnim osima. Krećemo od jednadžbe

$$|x+y|+|x-y|=1.$$

Uvođenjem supstitucije $x'=\alpha x$, $y'=\beta y$ dobit ćemo točke (x',y') koje pripadaju rubu pravokutnika širine α i visine β simetričnog s obzirom na koordinatne osi, sa stranicama paralelnima s osima. Vrijedi

$$\left|\frac{1}{\alpha}x'+\frac{1}{\beta}y'\right|+\left|\frac{1}{\alpha}x'-\frac{1}{\beta}y'\right|=1.$$

Sada translatiramo pravokutnik za proizvoljan vektor (a, b). Uz supstituciju $x''=x'+a$ i $y''=y'+b$ imamo

$$\left|\frac{1}{\alpha}(x''-a)+\frac{1}{\beta}(y''-b)\right|+\left|\frac{1}{\alpha}(x''-a)-\frac{1}{\beta}(y''-b)\right|=1.$$

Tu jednadžbu možemo zapisati i kao

$$\left|\frac{1}{\alpha}x''+\frac{1}{\beta}y''-\frac{\beta a+\alpha b}{\alpha\beta}\right|+\left|\frac{1}{\alpha}x''-\frac{1}{\beta}y''-\frac{\beta a-\alpha b}{\alpha\beta}\right|=1.$$

Konačno, možemo zaključiti da je jednadžba ruba pravokutnika zadanog tipa dana s

$$\left|\frac{1}{\alpha}x+\frac{1}{\beta}y-c\right|+\left|\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\beta}y-d\right|=1,$$

gdje su α i β širina, odnosno visina pravokutnika, dok je središte pravokutnika točka (a, b) čije koordinate dobivamo iz sustava

$$\begin{aligned}\beta a+\alpha b&=(\alpha\beta)c,\\ \beta a-\alpha b&=(\alpha\beta)d.\end{aligned}$$

Taj sustav za $\alpha,\beta\neq 0$ ima jedinstveno rješenje

$$a=\frac{\alpha(c+d)}{2},\qquad b=\frac{\beta(c-d)}{2}.$$

Primjer 5. Odredimo rješenje sustava

$$\begin{cases}|x+2y-16|+|x-2y+4|=4\\ |x+2y-15|+|x-2y-3|=4\end{cases}.$$

Rješenje.

Dijeljenjem obiju jednadžbi s 4 dobivamo sustav

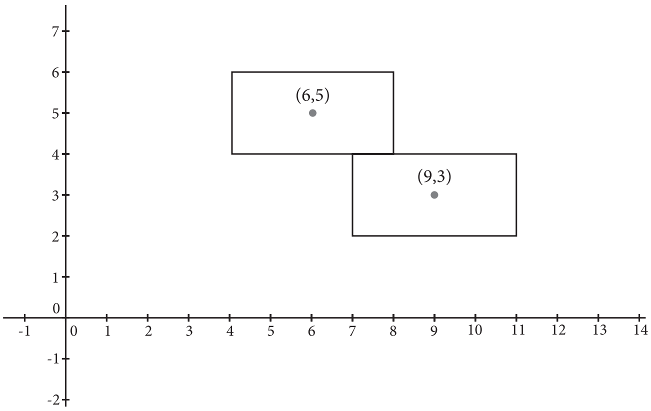
$$\begin{cases} \left|\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-4\right|+\left|\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+1\right|=1 \\ \left|\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-\frac{15}{4}\right|+\left|\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}\right|=1 \end{cases}.$$

Uočavamo kako su dobivene jednadžbe rubova pravokutnika čije su stranice paralelne koordinatnim osima.

Iz prve jednadžbe imamo $\alpha=4,\ \beta=2, c=4,\ d=-1$ te dobivamo a = 6, b = 5. Dakle, jednadžba predstavlja rub pravokutnika širine 4 i visine 2 sa središtem u točki (6, 5).

Analogno, iz druge jednadžbe imamo $\alpha=4,\ \beta=2, c=\frac{15}{4}, d=\frac{3}{4}$ pa slijedi a = 9, b = 3. Središte pripadnog pravokutnika je (9, 3) a širina i visina su opet redom 4 i 2.

Nacrtajmo oba pravokutnika (Slika 9).



Slika 9.

Uočavamo da se rubovi pravokutnika sijeku u dužini duljine 1 koja je paralelna x-osi. Njene su krajnje točke (7, 4) i (8, 4) pa je skup svih rješenja početnog sustava jednadžbi

$$\{(x,4):\ 7\le x\le 8\}.$$

Literatura

1. D. Jelenčić, Apsolutna vrijednost broja, Diplomski rad, PMF – Matematički odsjek, Zagreb, 2015.