



Projekt „Matematika između realnog i virtualnog”

TAMARA SRNEC¹

„Matematika između realnog i virtualnog” projekt je koji se provodi od 22. listopada 2015. do 23. listopada 2016. godine, a financiran je sredstvima Europskog socijalnog fonda, *Operativnog programa Razvoj ljudskih potencijala*, u ukupnom iznosu od 1 016 019 HRK (<http://www.ljudskipotencijali.hr/>). Odluku o financiranju projekta donijelo je Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta u okviru poziva za dodjelu bespovratnih sredstava HR.3.1.20 *Promocija kvalitete i unaprjeđenje sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*.

Idejni je začetnik i nositelj projekta **XV. gimnazija, Zagreb**, a kao partneri u projektu sudjeluju **XII. gimnazija iz Zagreba, Gimnazija Matije Antuna Reljkovića iz Vinkovaca, i Gimnazija Josipa Slavenskog iz Čakovca**.

Osnovni je cilj ovoga projekta osuvremeniti pristup učenju i poučavanju matematike novim kurikulumom fakultativne nastave matematike koji se temelji na unaprijed postavljenim ishodima učenja. U realizaciji, kroz niz različitih aktivnosti, sudjeluju nastavnici, stručni suradnici i učenici gimnazija partnera. Tijekom projekta razvijaju se kapaciteti partnerskih ustanova za provedbu novog kurikuluma fakultativne nastave te stvaraju preduvjeti za primjenu suvremenih metoda nastave uz primjereno korištenje tehnologije.

¹Tamara Srnc, Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec

Kurikulumom fakultativne nastave nastoji se potaknuti i razviti drugačiji pristup matematici uz uporabu novih tehnologija, alata i ideja. Učenici će temeljem usvojenih matematičkih znanja samostalno i suradnički otkrivati i primjenjivati matematiku u drugim područjima i realnim životnim situacijama. Cilj je kod učenika razviti logički način razmišljanja i zaključivanja, potaknuti kreativnost, poduzetnost, odgovornost, kritičnost i samostalnost u radu. Prepoznavanjem vrijednosti matematike razvit će se pozitivan stav prema matematici te popularizirati matematika općenito.

Prvi koraci

Na samom početku provedbe projekta anketirani su učenici kako bismo doznali jesu li zainteresirani za učenje matematike u fakultativnoj nastavi. Anketom su obuhvaćena 362 učenika prvih i drugih razreda iz svih škola koje sudjeluju u projektu. Ona je ispitivala stavove učenika o matematici i njenoj primjeni u životu. Više od 50 % učenika izjasnilo se da bi željelo biti uključeno u fakultativnu nastavu matematike i, ono što je zanimljivo, u drugačiji oblik nastave matematike uključili bi se i oni učenici koji u redovnom programu imaju slabiju ocjenu iz matematike. Više je zainteresiranih iz manjih sredina (Vinkovci, Čakovec) kojima je bilo koji drugi oblik rada izvan standardne nastave manje dostupan.

Uvažavajući dobivene rezultate inicijalnog istraživanja o učeničkoj želji za pohađanjem fakultativne nastave matematike, ali i prateći suvremene trendove u obrazovanju, planirane su metode učenja i poučavanja.

Tridesetak nastavnika i stručnih suradnika partnerskih škola sudjelovalo je u posebnim oblicima edukacija – predavanjima i radionicama održanim tijekom prosinca, siječnja i ožujka u Zagrebu. Radionice o izradi kurikuluma, ishodima učenja i vrednovanju vodile su prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš i prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija s Matematičkog odsjeka zagrebačkoga Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Radionice o korištenju računala i programa dinamičke geometrije *The Geometer's Sketchpad* te grafičkih kalkulatora u nastavi održane su u Čakovcu i Vinkovcima pod vodstvom profesorica iz XV. gimnazije Sanje Antoliš, Eve Špalj i Anete Copic koje su ujedno voditeljice cijeloga projekta.





Što smo napravili?

Postavljen je okvir kurikuluma fakultativne nastave s jasno definiranim ishodima učenja. Temelji se na primjeni tehnologije i učenju rješavanjem problema iz svakodnevnog konteksta.

Primjenom tehnologije uvodi se eksperiment u nastavu matematike. Učenici otkrivaju pravilnosti, istražuju svojstva matematičkih objekata, međusobno ih povezuju, postavljaju hipoteze koje testiraju na velikom broju primjera. Takav način učenja pridonosi konceptualnom razumijevanju matematičkih sadržaja, smanjuje razinu apstrakcije, oslobađa učenika od proceduralnog računanja i stavlja u fokus matematičke ideje.

Matematika u realnom kontekstu, u kojem učenici povezuju matematiku s vlastitim iskustvom te primjenjuju matematičke pojmove i postupke u vlastitome životnom okruženju, može motivirati učenike za učenje matematike. Modelirajući probleme, učenici stječu nova matematička znanja.

Uz suvremeni pristup učenju i poučavanju (suradničko učenje, individualizirana nastava) istaknuti su i suvremeni oblici praćenja i vrednovanja.

Strukturu fakultativne nastave čine **moduli**. Kako moduli nisu sadržajno vezani, tijekom izvođenja fakultativne nastave module je moguće kombinirati ovisno o interesima učenika/nastavnika.

U tablici je prikazano trajanje svakog modula i razred u kojemu ga je, s obzirom na sadržaje, moguće realizirati.

Naziv modula	Broj sati (godišnje)	Razred
GEOMETRIJA 1	35	prvi ili drugi
	35	treći
GEOMETRIJA 2	35	drugi, treći ili četvrti

Naziv modula	Broj sati (godišnje)	Razred
FUNKCIJE 1	35	drugi
	35	treći ili četvrti
FUNKCIJE 2	35	četvrti
MATRICE I VEKTORI	35	prvi, drugi, treći ili četvrti
MODELIRANJE	35	treći ili četvrti
STATISTIKA I VJEROJATNOST	35	prvi, drugi, treći ili četvrti
FINANCIJSKA MATEMATIKA	35	treći ili četvrti
TEORIJA GRAFOVA	35	prvi, drugi, treći ili četvrti
OPTIMIZACIJA	35	treći ili četvrti
ODABRANE NATJECATELJSKE TEME	35	prvi
	35	drugi
	35	treći
	35	četvrti

Opis modula i ishodi učenja

Najopširniji su moduli koji uključuju geometriju i funkcije.

U modulima **Geometrija 1** i **Geometrija 2** učenici će poznate sadržaje iz geometrije vizualizirati, utvrditi, proširiti i analizirati uporabom programa dinamičke geometrije.

Geometrijska svojstva i odnose primijenit će u rješavanju problema iz matematike, umjetnosti, fizike, geografije, arhitekture, geodezije i svakodnevice.

Modul Geometrija 1 obuhvaća geometriju ravnine, dok Geometrija 2 uključuje stereometriju, razvijanje prostornog zora i razumijevanje odnosa u prostoru.

U modulima **Funkcije 1** i **Funkcije 2** učenici će usvojiti pojam funkcije kao jednog od najvažnijih pojmova u matematici (i drugim područjima). Upotrebom tehnologije analizirat će svojstva elementarnih realnih funkcija jedne varijable kao i njihovih kompozicija te probleme iz realnog svijeta modelirati njima poznatim funkcijama.

Matrice i vektori obrađuju pojam matrice, determinante, inverzne matrice, svojstva matrica i račun s matricama te pojam, svojstva i prikaz vektora u ravnini i prostoru, uz obveznu primjenu u realnom svijetu.

Modeliranje je izdvojeno kao poseban modul. Proces modeliranja započinje nekim problemom iz realnoga svijeta. U problemu prepoznajemo matematičke koncepte te ih prevodimo u matematički problem koji rješavamo. Rješenje matematičkog problema interpretiramo te prihvaćamo ili odbacujemo kao rješenja realnoga problema. Matematički modeli koji će se primjenjivati u okviru ovog modula dolaze iz područja geometrije, funkcija, linearnog programiranja te statistike.

U modulu **Vjerojatnost i statistika** učenici će proučavati i primjenjivati osnovne principe vjerojatnosti i statistike izvodeći eksperimente i analizirajući dobivene rezultate.

Prikupljat će, opisivati, analizirati konkretne statističke podatke i odabirom statističkih metoda donositi zaključke koje će zatim predstaviti grafički koristeći se dostupnim računalnim alatima i alatima dinamičke geometrije.

Modulom **Financijska matematika** učenici stječu specifične numeričke, statističke i logičke vještine koje se odnose na spretnost u računanju, preračunavanju i financijskoj matematici (izračun postotka, razumijevanje kamatnih stopa i inflacije, izračun zajmova, kalkulacija, plaće). Danas se aktivno sudjelovanje pojedinaca u ekonomskom životu smatra gotovo nezamislivim bez odgovarajuće razine osnovne financijske pismenosti.

U **Teoriji grafova** učenici će se upoznati s matematičkom strukturom zvanom graf koja opisuje povezanost sustava. Pomoću grafova modeliramo transportne ili komunikacijske sustave, električne ili internetske mreže, molekule i slično. Dio nastave u okviru ovog modula realizirat će se u projektima.

Teme vezane uz **Optimizaciju**, određivanje minimuma i maksimuma nalaze se u gotovo svim ciklusima matematičkog obrazovanja. U ovom će modulu učenici proučiti i primijeniti neke od metoda pronalaženja najpovoljnijeg rješenja zadanog problema.

Modul **Odabrane natjecateljske teme** može se prema interesima (sposobnostima) učenika uključiti u bilo koji (pa i svaki) razred srednjoškolskog obrazovanja ovisno o interesima, afinitetima i sposobnostima učenika uključenih u fakultativnu nastavu. Uključuje teme iz teorije brojeva, nejednakosti, kombinatorike, geometrije.

Za svaki od navedenih modula definirani su specifični ishodi učenja. Za ostvarenje ishoda učenja planirane su aktivnosti učenika (i nastavnika). Materijali za provođenje aktivnosti bit će objedinjeni u vježbenicama za učenike i priručnicima za nastavnike te u digitalnom obliku.

Naglasak je na istraživačkoj, problemskoj i projektnoj nastavi, uz primjenu elemenata igrifikacije i informatičke tehnologije, s ciljem veće motivacije učenika te povećanja odgovornosti samih učenika u procesu učenja.

Materijali za učenike i nastavnike

Svi materijali za nastavu koncipirani su uglavnom prema jedinstvenom principu i jednakoj formi. Sastoje se od sljedećih dijelova:


- opis aktivnosti
- definiranje problema
- uputa za korištenje tehnologije
- teorijska podloga
- pretpostavke mogućih rješenja problema
- prijedlozi za matematičke modele
- dodatni zadatci / aktivnosti
- primjena naučenog
- literatura, poveznice.

Testirani su u nastavi s učenicima škola iz projekta te mijenjani prema primjedbama i prijedlozima učenika i nastavnika. Većina testiranih učenika materijale i način rada ocijenila je izuzetno pozitivno.


Primjeri radnih materijala:

Modul: Geometrija 2

Aktivnost: Matematika egipatskih piramida

 **Što ćemo raditi?**


Istražiti zanimljiva matematička svojstva velikih piramida u Egiptu.

 **U čemu je problem?**


Piramide u Gizi stoljećima su predmet divljenja. Jeste li ikada razmišljali o njihovim proporcijama, oplošju, volumenu, unutrašnjosti? Stari su Egipćani sve precizno matematički izračunali. U sljedećoj su tablici dane dimenzije triju velikih piramida.

Naziv	Keopsova	Kefrenova	Mikerinova
Duljina brida osnovke	230,36 m	215,26 m	105,50 m
Visina piramide	146,72 m	143,87 m	65,55 m

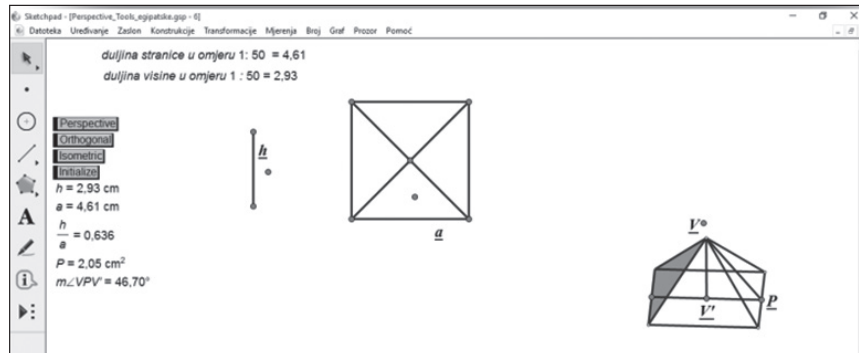
Engleski je matematičar i egiptolog John Taylor (1781.-1864.) zaključio da je Keopsova piramida bila koncipirana i građena tako da je površina svakog jednakokračnog trokuta njezina pobočja jednaka površini kvadrata čije su stranice visine piramide. Je li bio u pravu? Druga Taylorova pretpostavka je da je opseg baze jednak opsegu kružnice čiji je polumjer visina piramide. Vrijedi li ta tvrdnja? Koja je od piramida bila građena po pravilu "zlatnog reza"? Koliki su omjeri njihovih visina i stranica osnovke? Prepoznajete li tu neke često upotrebljavane iracionalne brojeve? Koliki je prikloni kut između njihovih strana? Koliki je to dio punog kruga?

 **Potražite pomoć tehnologije.**

Nacrtajte sve tri piramide u alatu dinamičke geometrije u omjeru 1 : 50. Izmjerite tražene kuteve i površine, izračunajte omjere.

 **Kako bi to riješila teorija?**


Pretpostavimo da je $P_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = h^2$. Kvadriranjem ove jednačbe dobivamo bikvadratnu jednačbu $h^4 - \frac{a^2}{4}h^2 - \frac{a^4}{16} = 0$ čije je jedno rješenje $h = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cdot \frac{a}{2}$ koje u sebi ima konstantu proporcionalnosti zlatnog reza $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Prikloni kut njezinih bočnih strana iznosi $\alpha = \arctg \frac{2 \cdot h}{a} = \arctg \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = 51^{\circ}49'38''$. Keopsova piramida nije građena izravno po pravilu zlatnog reza, tj. $\frac{a}{h} \neq \varphi$.



I još...

U prijedlogu kurikulumu su, uz ishode učenja, za svaki od modula opisani i postupci vrednovanja: ulazno/izlazne ankete, kontinuirano praćenje, samovrednovanje, vrednovanje kao učenje, kriterijsko vrednovanje i vrednovanje timskog rada.

Zaključak

 Želimo li da učenici u matematici vide smisao i svrhu, da im način rada i učenja bude zanimljiv, smislen, uz suvremeni pristup i korištenje tehnologije, te da uče istraživanjem, „Matematika između realnog i virtualnog” otkriće upravo takav pristup matematici. Spoj je iskustva i ideja profesora matematike uključenih u projekt, pokriva široko područje matematike, za razne je uzraste i sposobnosti učenika, te pristupa poučavanju iz jednog sasvim novog kuta.