

O fiksnim točkama osnovnih hiperbolnih funkcija

NIKOLINA ZATEZALO¹, MIRELA KATIĆ ŽLEPALO² I BOJAN KOVAČIĆ³

Sažetak

U ovom članku razmatramo fiksne točke četiriju osnovnih hiperbolnih funkcija: sinus hiperbolni, kosinus hiperbolni, tangens hiperbolni i kotangens hiperbolni. Za svaku pojedinu funkciju određujemo ukupan broj fiksnih točaka, te navodimo njihove točne vrijednosti (ako postoje), odnosno njihove približne vrijednosti izračunane metodom raspolavljanja.

1. Uvod

U ovom ćemo članku razmatrati egzistenciju i jedinstvenost fiksnih točaka osnovnih hiperbolnih funkcija: $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ i $\operatorname{cth} x$. Prvo se podsjetimo na definiciju fiksne točke realne funkcije jedne realne varijable.

Definicija 1. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}$ i $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. *Fiksna točka* funkcije f svaki je $x \in X$ za koji vrijedi jednakost $f(x) = x$.

Napomena 1. Ponekad se pogrešno previđa zahtjev da fiksna točka nužno mora pripadati prirodnom području definicije (domeni) funkcije f . Skup svih fiksnih točaka funkcije f je podskup skupa svih realnih rješenja jednadžbe $f(x) = x$. O domeni funkcije f ovisi je li riječ o pravom podskupu ili su ta dva skupa jednaka.

Napomena 2. Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bijekcija. Tada je skup fiksnih točaka funkcije f jednak skupu fiksnih točaka njezina inverza f^{-1} . Dokaz vidjeti npr. u [1].

¹Nikolina Zatezalo, studentica stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu

²Mirela Katić Žlepalo, Graditeljski odjel Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu

³Bojan Kovačić, stručni studij elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu

2. Pregled osnovnih svojstava osnovnih hiperbolnih funkcija

Radi jednostavnosti i preglednosti, u sljedećoj tablici navodimo osnovna svojstva svake od četiriju osnovnih hiperbolnih funkcija koja ćemo koristiti u kasnijem izlaganju.

<i>Funkcija</i>	<i>Domena D(f)</i>	<i>Slika Im(f)</i>	<i>(Ne)parnost i monotonost</i>	<i>Derivacija</i>
$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	neparna, strogo rastuća	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	$[1, +\infty)$	parna	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	\mathbb{R}	$\langle -1, 1 \rangle$	neparna, strogo rastuća	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	neparna, strogo padajuća	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Tablica 1. Osnovna svojstva četiriju osnovnih hiperbolnih funkcija

3. Pregled korištenih poučaka

Radi preglednosti, u ovoj točki navodimo pregled poučaka korištenih u daljnjem izlaganju. Svi oni odnose se na realne funkcije jedne realne varijable. Čitatelje zainteresirane za dokaze Poučaka 1. – 3. upućujemo na literaturu [1], [2] i [3].

Poučak 1. Svaka strogo monotona⁴ realna funkcija je injekcija.

Poučak 2. Neka je f realna funkcija definirana i derivabilna na otvorenom intervalu $I = \langle a, b \rangle$.

- a) Ako za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$, onda je f strogo padajuća na I .
- b) Ako za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ vrijedi $f'(x) > 0$, onda je f strogo rastuća na I .

Poučak 3. Neka su $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in X$. Definirajmo funkciju $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom $g(x) = f(x) - x$. Tada je x_0 fiksna točka funkcije f ako i samo ako je x_0 nultočka funkcije g .

⁴tj. strogo rastuća ili strogo padajuća

Poučak 4. Neka je $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ injekcija. Ako f ima nultočku, onda je ta nultočka jedinstvena.

Dokaz: Neka su x_0 i x_1 dvije nultočke funkcije f . Iz definicije injektivnosti funkcije slijedi $(0 = f(x_0) = f(x_1)) \Rightarrow x_0 = x_1$, što se i tvrdilo. ■

4. O fiksnim točkama funkcije sh

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 5. Funkcija $f(x) = \operatorname{sh} x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Dokaz: Budući da vrijedi jednakost $\operatorname{sh}(0) = 0$, iz Definicije 1. odmah slijedi da je $x_0 = 0$ fiksna točka funkcije f . Stoga treba dokazati jedino jedinstvenost. ■

Definirajmo funkciju $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom $f_1(x) = \operatorname{sh} x - x$. Primjenom Poučka 3. zaključujemo da je $x_0 = 0$ nultočka funkcije f_1 . Poučak 5. bit će dokazan dokažemo li da je ta nultočka jedinstvena. Koristeći diferencijalni račun, dobivamo:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \operatorname{ch} x - 1, \\ f_1''(x) &= \operatorname{sh} x. \end{aligned}$$

Prema Tablici 1., za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $\operatorname{ch} x \geq 1$, odnosno nejednakost $\operatorname{ch} x - 1 \geq 0$. Odatle zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $f_1'(x) \geq 0$.

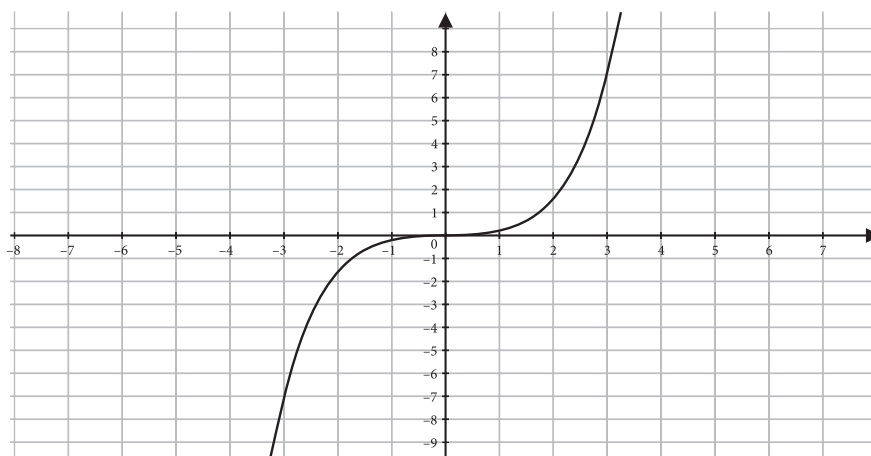
Odredimo sve stacionarne točke funkcije f_1 , tj. sve realne nultočke funkcije f_1' . Imamo redom:

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 &= 0, \quad / \cdot 2 \cdot e^x \\ (e^x)^2 - 2 \cdot e^x + 1 &= 0, \\ (e^x - 1)^2 &= 0, \\ e^x &= 1. \end{aligned}$$

Odatle je $x = 0$. Dakle, f_1 ima jedinstvenu stacionarnu točku $x_0 = 0$.

Tako smo pokazali da za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi nejednakost $f_1'(x) > 0$. Primjenom Poučka 2. zaključujemo da je f_1 strogo rastuća na skupu \mathbb{R} , pa iz Poučka 1. slijedi da je f_1 injekcija. Napokon, iz Poučka 4. zaključujemo da f_1 ima jedinstvenu nultočku, što smo i željeli pokazati. ■

Graf funkcije f_1 prikazan je na Slici 1.



Slika 1. Graf funkcije $f_1(x) = \text{sh } x - x$

Napomena 3. Funkcija f je bijekcija s \mathbb{R} u \mathbb{R}^5 . Njezin inverz je funkcija $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana pravilom $f_2(x) = \text{Arsh } x$ ⁶. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da f_2 ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Napomena 4. Dokaz analogan dokazu Poučka 5. nerijetko se pokušava „pojednostavniti” ovako:

„Funkcija f je bijekcija. Identiteta $i(x) = x$ je bijekcija. Razlika dviju bijekcija je opet bijekcija, pa je funkcija f_1 bijekcija. Njezina nultočka je $x_0 = 0$, pa tvrdnja slijedi iz Poučka 3.”

Pogreška u ovom „dokazu” je tvrdnja da razlika dviju bijekcija mora biti bijekcija. Npr. funkcije $f_3, f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirane pravilima $f_3(x) = 2 \cdot (x+1)$, $f_4(x) = 2 \cdot x + 1$ su bijekcije sa \mathbb{R} u \mathbb{R} , ali njihova razlika $f_5(x) = 1$ očito nije bijekcija. Lako se vidi da analogna tvrdnja vrijedi i za zbroj, umnožak i količnik dviju bijekcija. Stoga prigodom obrade ovih pojmova u nastavnoj praksi treba naglašavati da (jedino) *kompozicija* dviju bijekcija mora biti bijekcija.

5. O fiksним točkama funkcije ch

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 6. Funkcija $g(x) = \text{ch } x$ nema nijednu fiksnu točku.

⁵Ta tvrdnja lagano slijedi „kombinacijom” svojstva strogoga rasta funkcije f , svojstva $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ i Poučka 1.

⁶Oznaku Arch treba čitati: area sinus hiperbolni.

Dokaz: Definirajmo funkciju $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom $g_1(x) = \operatorname{ch} x - x$. Poučak 6. bit će dokazan dokažemo li da g_1 nema nijednu realnu nultočku. Odredimo intervale monotonosti funkcije g_1 . Koristit ćemo f'' – test⁷. Odredimo prve dvije derivacije funkcije g_1 :

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \operatorname{sh} x - 1, \\ g_1''(x) &= \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

Odredimo stacionarne točke funkcije g_1 . Riješimo jednadžbu $g_1'(x) = 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x - 1 &= 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} - 1 &= 0, \quad / \cdot 2 \cdot e^x \\ (e^x)^2 - 2 \cdot e^x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Zamjenom $t = e^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 2 \cdot t - 1 = 0$$

Njezina rješenja su $t_1 = 1 + \sqrt{2}$ i $t_2 = 1 - \sqrt{2}$. Rješenje t_2 odbacujemo zbog nejednakosti $t = e^x > 0$ (koja vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$) i nejednakosti $t_2 < 0$. Slijedi:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \sqrt{2}, \\ x &= \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Zbog toga je $x_1 = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88137$ jedina stacionarna točka funkcije g .

Vidjeli smo da je slika funkcije $\operatorname{ch} x$ interval $[1, +\infty)$. Stoga posebno vrijedi i nejednakost $g_1''(x_1) \geq 1 > 0$. Primjenom f'' – testa slijedi da g_1 u točki x_1 ima strogi lokalni minimum. Pokažimo da je taj lokalni minimum ujedno i globalni minimum funkcije g_1 .

Promotrimo funkciju g_1 na intervalima $\langle -\infty, x_1 \rangle$ i $\langle x_1, +\infty \rangle$. Odaberemo $x_2 = 0 \in \langle -\infty, x_1 \rangle$ i $x_3 = 1 \in \langle x_1, +\infty \rangle$. Izračunamo:

$$\begin{aligned} g_1'(x_2) &= -1 < 0, \\ g_1'(x_3) &= \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 = \frac{e^2 - 2 \cdot e + 1}{2 \cdot e} = \frac{(e-1)^2}{2 \cdot e} > 0. \end{aligned}$$

Primjenom Poučka 2. zaključujemo da g_1 strogo pada na intervalu $\langle -\infty, x_1 \rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle x_1, +\infty \rangle$. To znači da g_1 ima strogi globalni minimum u točki x_1 .

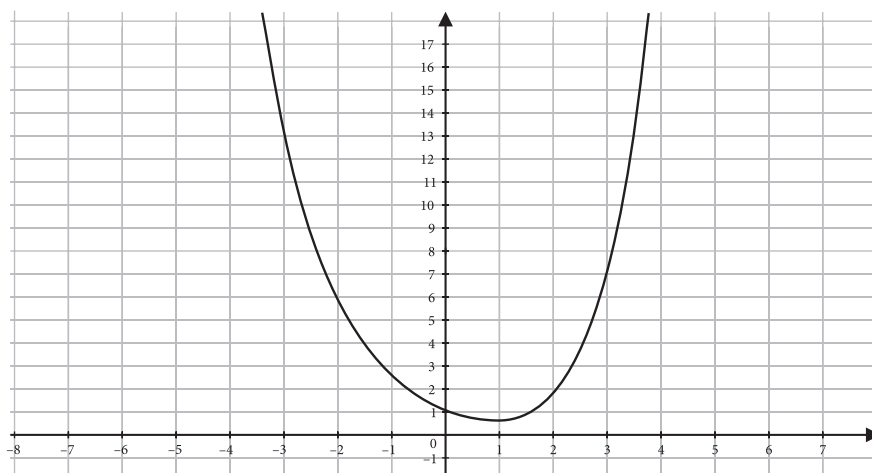
⁷Detaljnije o f'' – testu vidjeti npr. u [2].

Iz definicije strogoga globalnoga minimuma slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$g_1(x) \geq g_1(x_1) = \operatorname{ch} \left[\ln(1 + \sqrt{2}) \right] - \ln(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.53284,$$

Odatle slijedi $g_1(x) > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, g_1 je strogo pozitivna na cijelom svom području definicije, pa ta funkcija nema realnih nultočaka, što smo i željeli dokazati. ■

Graf funkcije g_1 prikazan je na Slici 2.



Slika 2. Graf funkcije $g_1(x) = \operatorname{ch} x - x$

Napomena 5. Funkcija g je parna, pa nije bijekcija. Međutim, njezina restrikcija na interval $[0, +\infty)$ je bijekcija, pa ima inverz. Taj inverz je funkcija $g_2 : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definirana pravilom $g_2(x) = \operatorname{Arch} x$ ⁸. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da f_2 nema nijednu fiksnu točku.

6. O fiksnim točkama funkcije th

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 7. Funkcija $h(x) = \operatorname{th} x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Dokaz: Budući da vrijedi jednakost $\operatorname{th}(0) = 0$, iz Definicije 1. odmah slijedi da je $x_0 = 0$ fiksna točka funkcije f . Stoga treba dokazati jedino jedinstvenost fiksne točke.

Postupimo analogno kao u dokazu Poučka 5. Definirajmo funkciju $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom $h_1(x) = \operatorname{th} x - x$. Pokažimo da h_1 ima jedinstvenu nultočku, čime će tvrdnja

⁸Oznaku Arsh treba čitati: area kosinus hiperbolni.

Poučka 7. biti dokazana. Odredimo prve dvije derivacije te funkcije, pri čemu koristimo osnovni hiperbolni identitet $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$:

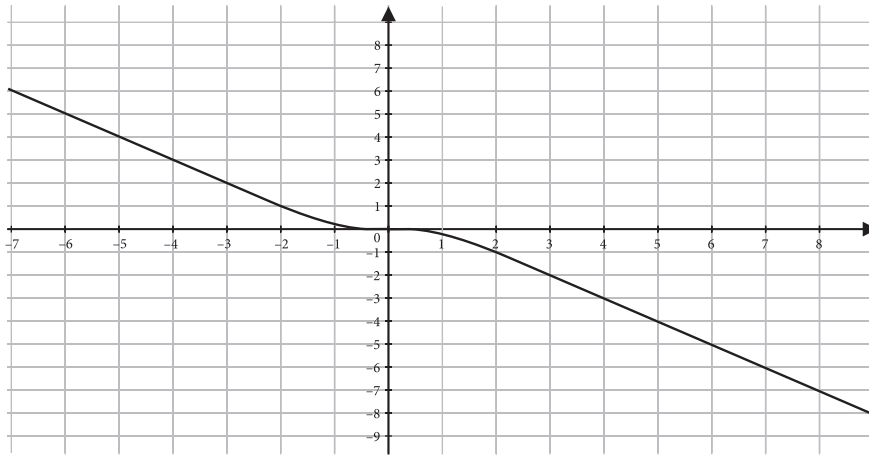
$$h_1'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x} - 1 = \frac{1 - \text{ch}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{-\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = -\text{th}^2 x,$$

$$h_1''(x) = -2 \cdot \text{th} x \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 x} = -2 \cdot \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 x} = -\frac{2 \cdot \text{sh} x}{\text{ch}^3 x}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\text{th}^2 x \geq 0$, pa odatle slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $h_1'(x) \leq 0$. Stacionarne točke funkcije h_1 su sva realna rješenja jednadžbe $\text{th} x = 0$, odnosno jednadžbe $\frac{\text{sh} x}{\text{ch} x} = 0$. Ta jednadžba je ekvivalentna jednadžbi $\text{sh} x = 0$. U točki 4. pokazali smo da ta jednadžba ima jedinstveno rješenje $x_0 = 0$. Stoga funkcija h_0 ima jedinstvenu stacionarnu točku $x_0 = 0$.

Tako zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi nejednakost $h_1'(x) < 0$. Primjenom Poučka 2. slijedi da je h_1 strogo padajuća na skupu \mathbb{R} . Analogno kao u dokazu Poučka 5. zaključujemo da je h_1 injekcija i da je njezina nultočka jedinstvena, a to je i trebalo dokazati. ■

Graf funkcije h_1 prikazan je na Slici 3.



Slika 3. Graf funkcije $h_1(x) = \text{th} x - x$

Napomena 6. Funkcija h je bijekcija s \mathbb{R} u $\langle -1, 1 \rangle$. Njezin inverz je funkcija $f_2 : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definirana pravilom $h_2(x) = \text{Arth} x^9$. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da h_2 ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

⁹Oznaku Arth treba čitati: area tangens hiperbolni.

7. O fiksnim točkama funkcije cth

U ovoj ćemo točki pokazati da funkcija $p(x) = \text{cth } x$ ima točno dvije fiksne točke. Potom ćemo približno izračunati svaku od njih koristeći metodu raspolavljanja.

Poučak 8. Funkcija $p(x) = \text{cth } x$ ima točno dvije fiksne točke.

Dokaz: Postupimo analogno kao u dokazu Poučaka 5. – 7. Definirajmo funkciju $p_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom $p_1(x) = \text{cth } x - x$. Odredimo prve dvije derivacije funkcije p_1 , pri čemu koristimo osnovni hiperbolni identitet $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$:

$$p_1'(x) = -\frac{1}{\text{sh}^2 x} - 1 = -\frac{1 + \text{sh}^2 x}{\text{sh}^2 x} = -\frac{\text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x} = -\text{cth}^2 x,$$

$$p_1''(x) = -2 \cdot \text{cth } x \cdot \left(-\frac{1}{\text{sh}^2 x}\right) = 2 \cdot \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \cdot \frac{1}{\text{sh}^2 x} = 2 \cdot \frac{\text{ch } x}{\text{sh}^3 x}.$$

Uočimo da za svaki $x \neq 0$ vrijedi nejednakost $p_1'(x) < 0$. Primjenom Poučka 2. zaključujemo da je p_1 strogo padajuća na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$. Nadalje, primijetimo da vrijede nejednakosti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = (\text{zbog } e^x < e^{-x}, \text{ za svaki } x < 0) = -\infty,$$

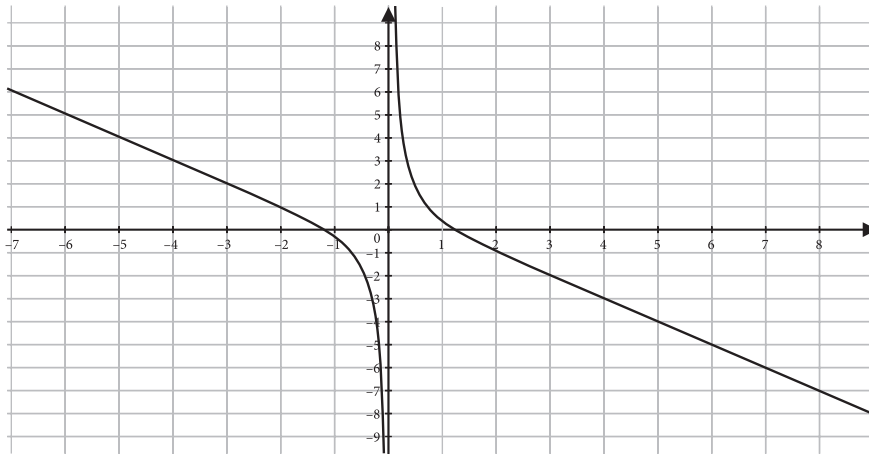
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = (\text{zbog } e^x > e^{-x}, \text{ za svaki } x > 0) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(e^x)^2 + 1}{(e^x)^2 - 1} - x \right] = (\text{zbog } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 + (e^x)^{-2}}{1 - (e^x)^{-2}} - x \right] = (\text{zbog } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty) = -\infty.$$

Iz prve i treće od tih jednakosti, te dokazanoga svojstva strogoga pada funkcije p_1 zaključujemo da p_1 ima točno jednu nultočku u intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$. Analogno, iz druge i četvrte jednakosti i svojstva strogoga pada funkcije p_1 zaključujemo da p_1 ima točno jednu nultočku u intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Sada tvrdnja Poučka 8. slijedi izravnim primjenom Poučka 3. ■

Graf funkcije p_1 prikazan je na Slici 4.



Slika 4. Graf funkcije $p_1(x) = \text{cth } x - x$

Iz gornje slike vidimo da fiksne točke iz Poučka 8. pripadaju segmentima $[-2, -1]$ i $[1, 2]$. Preciznije, postoji jedinstveni $x_1 \in [1, 2]$ takav da su x_1 i $-x_1$ nultočke funkcije p_1 .¹⁰ Stoga ćemo metodom raspolavljanja izračunati vrijednost x_1 s točnošću od 10^{-3} . Najveći potreban broj iteracija je najmanje prirodno rješenje nejednadžbe

$$n \geq \frac{\log(2-1) - \log(10^{-3})}{\log 2} - 1 = \frac{3}{\log 2} - 1 \approx 8.97,$$

tj. $n = 9$. Dobiva se sljedeća tablica:

Iteracija	a	b	x	$p_1(x)$
0	1	2	1.5	-0.395208607
1	1	1.5	1.25	-0.07114902
2	1	1.25	1.125	0.110634101
3	1.125	1.25	1.1875	0.017606891
4	1.1875	1.25	1.21875	-0.027259713
5	1.1875	1.21875	1.203125	-0.004953862
6	1.1875	1.203125	1.1953125	0.006293961
7	1.1953125	1.203125	1.19921875	0.000661999

Zaključujemo: $x_1 \approx 1.199$, pa su fiksne točke funkcije p $x_1 \approx 1.199$ i $x_2 = -x_1 \approx -1.199$.

¹⁰Vrijedi sljedeća tvrdnja: Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ neparna funkcija. Tada je x_0 nultočka funkcije f ako i samo ako je $-x_0$ nultočka te funkcije. Za dokaz vidjeti [1].

Napomena 6. Funkcija p je bijekcija sa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ u $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Njezin inverz je funkcija $p_2 : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definirana pravilom $p_2(x) = \text{Arcth } x$ ¹¹. Primjenom Napomene 2. zaključujemo da p_2 ima točno dvije fiksne točke:

$$x_1 \approx 1.199 \text{ i } x_2 = -x_1 \approx -1.199.$$

8. Zaključak

U nastavi matematičkih predmeta na tehničkim stručnim studijima uobičajeno se obrađuju osnovne hiperbolne funkcije. Njihovi inverzi u pravilu se spominju samo „informativno”, odnosno bez detaljnijega izučavanja. Zbog toga studenti stručnih studija hiperbolnu trigonometriju uglavnom „doživljavaju” kao primjenu eksponencijalne funkcije koju uče u srednjoj školi, a ne kao zasebnu granu matematike. U tom se kontekstu i rješavanje jednadžbi u kojima se pojavljuju hiperbolne funkcije najvećim dijelom svodi na rješavanje eksponencijalnih jednadžbi. Iako je takav pristup možda teorijski i stručno neopravdan, naša metodička iskustva pokazuju da studenti bitno više razumiju relacije među hiperbolnim funkcijama ako se te funkcije zapisuju u eksponencijalnom, odnosno logaritamskom „obliku” (preciznije, ako se npr. umjesto $\text{ch } x$ efektivno radi s izrazom $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ itd.). Slijedeći vlastita iskustva, analogan pristup primijenili smo i u ovom članku. Ipak, nadamo se da će u dogledno vrijeme na nastavi matematičkih predmeta na tehničkim stručnim studijima, a ponajprije na stručnim studijima graditeljstva i elektrotehnike, biti stvoreni potrebni preduvjeti (ponajprije, povećanje propisane ukupne satnice matematičkih predmeta) za kvalitetniju obradu osnovnih načela hiperbolne trigonometrije, kao i njezine povezanosti s numeričkom matematikom u kontekstu približnoga rješavanja nealgebarskih jednadžbi.

Literatura

1. M. Jelčić, K. Ivankić, M. Katić Žlepalo, B. Kovačić: *O fiksniim točkama osnovnih trigonometrijskih funkcija*, Poučak br. 64, Zagreb, 2016.
2. S. Kurepa: *Matematička analiza 1 – Diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
3. S. Kurepa: *Matematička analiza 2 – Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
4. V. Hari: *Numerička analiza – osnovni udžbenik*, skripta, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2004.
5. R. Scitovski: *Numerička matematika*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.

¹¹Oznaku $\text{Arcth } x$ treba čitati: area kotangens hiperbolni.