Govorite li bayesovski? Pregled bayesovske teorije vjerojatnosti i njezine prototeorije I. DIO

Kajetan Šeper[1]

Predgovor

Ovaj mali pregled u nas novog pogleda na vjerojatnost temeljenu na proširenoj klasičnoj logici izjava, a ne na algebri (i σ-algebri) skupova i teoriji mjere kao u Kolmogorova 1933., ima ograničen cilj upoznavanja s osnovom tzv. bayesovske teorije vjerojatnosti. Tako će čitatelji moći sami odlučiti o njezinoj vrlini i uz pomoć dodatne literature možda tu B-teoriju početi primjenjivati. Naime, moramo istaknuti da taj pregled nije udžbenik ni priručnik za primjenjivače, nego samo poticaj na šire i dublje upoznavanje, primjenjivanje i istraživanje tog područja primijenjene logike.

U nas nema takvih udžbenika jer su naši teoretičari vjerojatnosti 100-postotni sljedbenici Kolmogorova, a nemaju čak ni smisla za već prilično razvijene novije poglede vezane za primjenu teorije složenosti u teoriji vjerojatnosti. To je novo područje već odavno potaknuto kritičkim preispitivanjem teorije u stilu Kolmogorova.

Znam da u nas bayesianizam promiče samo prof. dr. sc. Zvonimir Šikić, ali na žalost bez veće pažnje akademske i matematičke zajednice.

Zahvala

Zahvaljujem profesoru Zvonimiru Šikiću na opskrbi starijom i novijom literaturom o B-teoriji vjerojatnosti, tzv. probabilističkoj logici, i posebice na preslikama njegovih dvaju članaka o toj u nas gotovo nepoznatoj teoriji.

Uvod

1. Tri pitanja o „staroj”, „novoj staroj” i „novoj” teoriji vjerojatnosti

1.1. Što je stara teorija i zašto je ***još uvijek*** radni matematičari, teoretičari vjerojatnosti i statističari razvijaju, a mnogi inženjeri i znanstvenici posebnih struka i primjenjuju?

[1]Kajetan Šeper, Slavonski Brod

Na prvi dio pitanja može se odgovoriti da je teorija Kolmogorova iz 1933. stara teorija, nazvat ćemo je kratko *K-teorija*. Ona je tek sada, nakon višestoljetnog povijesnog razvitka (neki bi možda rekli nematematičkog, bez jasnog pojmovnog sustava, a ipak sa značajnim postignućima u području vjerojatnosti i statistike), postala glavna i prava matematička teorija prema standardima 20. st. i ostala do danas prihvatljiva većini radnih matematičara u tom području, moguće s nekim izmjenama ili poopćenjima. (O tim izmjenama i filozofsko-znanstvenoj kritici, iako su to važne i zanimljive teme, ovdje neće biti govora.)

Na drugi se dio pitanja može odgovoriti, prema analogiji s drugim znanstvenim teorijama kroz povijest, jedino: Čekajte!

1.2. Što je nova stara teorija i zašto je ***još uvijek*** radni vjerojatnostičari i statističari već **ne upoznaju *temeljito* i ne prihvate kao konkretniju, primjenljiviju i općenitiju teoriju?**

Na prvi se dio pitanja može najkraće odgovoriti da je to obnovljeno u prvoj polovici 20. st. staro shvaćanje vjerojatnosti i metoda kojima su se služili matematičari i praktičari J. Bernoulli, T. Bayes i P. S. Marquis de Laplace i drugi još od 18. i 19. st. i plodonosno primjenjivali na žive i svakodnevne probleme rješavajući ih na najbolji način, i to u tadašnjem znanstvenom, ali ne točno određenom sustavu bez današnje strogosti suvremenog matematičko-bayesovskog sustava.

Ta se obnovljena teorija danas naziva *bayesovska teorija vjerojatnosti* ili *bayesovska probabilistička logika*, prema Bayesu 1763. i po njemu nazvanom poučku koji ima središnje mjesto u toj, nazovimo je kratko *B-teoriji*. Laplace je 1812. taj poučak nezavisno izrekao u općem obliku i primjenjivao, stoga bi taj poučak trebalo zvati Bayes-Laplaceov poučak. Postoji i drugi smjer istraživanja probabilističke logike koju razvija Keisler i njegovi sljedbenici. Sažeti opis B-teorije i usporedba s K-teorijom slijede.

Na drugi dio pitanja mora se odgovoriti da je *samo neki ne prihvaćaju* u naprednim znanstveno-tehničkim sredinama, gdje *samo neki* tijekom dugog razdoblja života i rada djeluju *u zatvorenom znanstvenom i kulturno obrazovnom krugu*. U nas *svi ili gotovo svi* žive i rade djelujući *u takvom zatvorenom krugu neprihvaćanja drugačijih teorijskih pristupa i praktičnih primjena*, iako ti novi i drugačiji mogu biti s raznih gledišta i bolji od starih i ustaljenih. Drugi pak, živeći u naprednim sredinama, prihvaćaju nove teorije i metode koje se stalno potvrđuju kao za sada najbolje, a stare ipak ne odbacuju *a priori* nego ih prilagođavaju novim postignućima.

1.3. Što je nova teorija i je li ona uopće potrebna?

Bitna novina u novoj teoriji, zovimo je u ovom pregledu *prva* teorija ili *prototeorija*, jest *podgradnja* ili *zasnivanje* B-teorije na temelju *osnovnih pravila*. U nastavku ćemo razmatrati dvije vrste pravila: Coxove *aksiome* i Jaynesove *zahtjeve* ili *desiderata*. Ta osnovna pravila zvat ćemo *protoaksiomi* ili *postulati*, pri čemu ćemo

Coxovu prototeoriju zvati C-teorija, a Jaynesovu J-teorija. Na temelju tih postulata dokazuju se *izvedena pravila* ili poučci (teoremi), a to će biti *aksiomi B-teorije* ili *B-aksiomi*. To je odgovor na prvo pitanje. Na drugo pitanje mnogo je teže odgovoriti.

Praktičarima i probabilističkim logičarima prototeorija, slobodan sam tvrditi, nije potrebna, a filozofima matematike i znanosti prototeorija bi bila „konačno rješenje" i vrhunski matematičko-filozofski i znanstveni domet, ako bi se mogla, a slobodan sam sumnjati u to, jednoznačno i točno *more geometrico* opisati, i to prvenstveno tako da bude jednostavnija od proizvedene u njoj B-teorije. To je moj odgovor na drugo pitanje. (Vidi glavu D.)

1.4. Kratki sadržaj po glavama i poglavljima u II. dijelu

U glavi D. Opis B-prototeorije, u poglavlju 11, nalazi se sažeti opis Coxove, Jaynesove i Loredove prototeorije koja vodi do funkcionalnih jednadžbi i aksioma B-teorije.

Slijedi glava E. Povijesni osvrt u kojem se u poglavljima 12 i 13 vrlo kratko govori o postanku i razvoju razmišljanja o slučajnosti i vjerojatnosti od 17. do 21. st., a u poglavlju 14 također kratko o literaturi i o bayesovskoj vjerojatnosnoj logici i bayesizmu (bayesinizmu) u Republici Hrvatskoj.

U glavi F. Dodaci, u poglavljima 17 i 18, navode se dva istaknuta aksiomatička sustava.

Glava G. sadrži razmišljanja o vjerojatnosnoj nezavisnosti, a počinje poglavljem 19. Četiri dvostruka pitanja i nastavlja uvodnim poglavljem 20. Slaba i jaka sadržajna i formalna nezavisnost dvije izjave i poopćenjem u poglavlju 21. Jaka sadržajna i formalna nezavisnost $n \geq 2$ izjava.

Glava H. Zadaci sadržava zadatke 22.1 – 22.10.

Na kraju slijedi Literatura.

2. Opći uvid u izabrano nazivlje i znakovlje

2.1. $\boldsymbol{\overline{A}}$, $\boldsymbol{A \cdot B}$ ili $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{A + B}$

U ovom smo članku izabrali uglavnom Hausdorffovo nazivlje i znakovlje iz njegove teorije skupova 1927. koje je Kolmogorov uporabio u svojoj aksiomatizaciji računa vjerojatnosti 1933., a kasnije su se njima, pod njegovim utjecajem i zbog njihove sugestivnosti i ekonomičnosti, dugo koristili teoretičari vjerojatnosti i skupova, a booleovski algebraičari sve do danas.

To su: $\overline{A}$ za *dopunu* (**ne** A), $A \cdot B$ ili skraćeno AB za umnožak (A **i** B) i $A + B$ za zbroj (A **ili** B (**ili oboje**)).

Jedina je razlika što je ovdje izvorno Hausdorffovo *isključivo zbrajanje* (A **ili** B (**ali ne oboje**)), označeno $+$, zamijenjeno *uključivim* i označeno $+$, a ne $\dot{+}$, kao što je bilo izvorno. Povijesno gledano, Hausdorffovo isključivo zbrajanje, zvano *disjunkcija,* zapravo je Booleovo iz 1847. koje je Peirce već 1885. zamijenio uključivim, zvanim pogrešno disjunkcija, a koje se ovdje i u mnogih logičara naziva *alternacija*. (Prisjetite se samo što znači pojam „disjunktni skupovi".)

2.2. $\boldsymbol{A^c}$, $\boldsymbol{A \cap B}$, $\boldsymbol{A \cup B}$; $\boldsymbol{-A}$ ili $\boldsymbol{\neg A}$, $\boldsymbol{A \wedge B}$, $\boldsymbol{A \vee B}$

U suvremenoj teoriji skupova i teoriji vjerojatnosti rabe se sljedeći nazivi i oznake koje po redoslijedu odgovaraju gore izabranima: A^c za dopunu u odnosu na Ω (univerzalni prostor ishoda), $A \cap B$ za presjek i $A \cup B$ za udrugu ili spoj; a u probabilističkoj logici bayesovaca : $-A$ ili $\neg A$ za nijek, $A \wedge B$ za sastav i $A \vee B$ za rastav na slučajeve (A, B ili oboje).

2.3. $\boldsymbol{A \to B}$, $\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$

Umjesto Russellove i Whiteheadove tzv. materijalne *implikacije* i *ekvivalencije* iz 1910. – 1913., udomaćene i prihvaćene od mnogih logičara i matematičara sve do danas, u ovom se članku rabi ipak ispravan i već prilično ustaljen naziv *pogodba* ili *kondicional* i oznaka $A \to B$ za pogodbenu rečenicu „Ako A onda B" ili „ A samo ako B" odnosno *dvopodba* ili *bikondicional* i oznaka $A \leftrightarrow B$ za dvopodbenu rečenicu „Ako A onda B, i obrnuto" ili „ A samo ako B, i obrnuto", ali u uporabi su i fregeovske istoznačnice (osobito u Njemačkoj) *subjunkcija* „ A pod B" i *bisubjunkcija* „ A pod B, i obrnuto".

2.4. $\vdash$, $\vDash$, $=$; „ne", „i", „ili"; &, , ; $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$

Govoreći o izjavama i sudovima $A, B, A_1, A_2, \ldots$ klasične logike na višoj logičkoj razini, tj. o *tvrdnjama* ili *nadizjavama* koje se odnose na formalnu (aksiomatičku, sintaktičku) dokazivost, $\vdash A$, ili istinosno tabličnu (interpretacijsku, modelnu, semantičku) valjanost, , moguće u oba slučaja uz jednu ili više ali konačno mnogo pretpostavaka, $A_1, A_2, \ldots \vdash B$, odnosno $A_1, A_2, \ldots \vDash B$, ili na podjednakost $A = B$ itd., koristimo se običnim prirodnim jezikom s *prirodnim nadizjavnim veznicima:* „ne" ili „nije", „i" i „ili". Jedino za „i" rabimo oznaku & ili , (zarez), a u slučaju više tvrdnji $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots \mathbb{A}_n$ izražavamo njihovu i -tvrdnju s , i & : $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots \mathbb{A}_{n-1} \,\&\, \mathbb{A}_n$, tako da posljednji zarez zamijenimo s & .

Za tvrdnje $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ složenu tvrdnju „ako $\mathbb{A}$ onda " ili „iz $\mathbb{A}$ slijedi $\mathbb{B}$" ili $\mathbb{A}$ implicira $\mathbb{B}$" označujemo $\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ pomoću prirodnog veznika $\Rightarrow$ ili $\mathbb{B} \Leftarrow \mathbb{A}$ pomoću pridruženog protuveznika $\Leftarrow$, a tvrdnju „ako $\mathbb{A}$ onda $\mathbb{B}$, i obrnuto" ili „iz $\mathbb{A}$ slijedi $\mathbb{B}$, i obrnuto" ili „ $\mathbb{A}$ je podjednako (ekvivalentno) s $\mathbb{B}$" označujemo $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ pomoću prirodnog veznika $\Leftrightarrow$.

Svi navedeni prirodni veznici su *neklasični,* a pripadne tvrdnje *ne* pripadaju klasičnoj logici formalne dokazivosti i tablične valjanosti izjava i sudova, nego sadržajnoj logici dokazivosti i oborivosti tvrdnji.

Oznake „ $—_1 :\Leftrightarrow —_2$ " i „ $—_1 := —_2$ " upućuju na definicije; prva se čita „ $—_1$ je po definiciji podjednako (ekvivalentno) s $—_2$ ", a druga se čita „ $—_1$ je po definiciji jednako s $—_2$ ".

2.5. $\boldsymbol{A \mid B, w(A \mid B)}$

U probabilističkoj logici kao i u svakoj teoriji vjerojatnosti pojavljuje se intuitivan, tj. točno nedefiniran izraz oblika $A \mid B$ i pridružena tzv. *uvjetna vjerojatnost* $w(A \mid B)$ *pod uvjetom* B. Dokle god se taj izraz točno ne definira, vertikalna crta samo je odvajač koji odvaja u uređenom paru prvu izjavu A od druge B.

Neki bayesovci taj izraz $A \mid B$ smatraju *osnovnim pojmom*, dakle nedefiniranim. Drugi ga pak objašnjavaju poopćenjem tradicionalnog silogizma $\frac{B}{A}$ s *premisom* B i *konkluzijom* A, *pod uvjetom* da B *ne smije biti logička ništica,* ◐, a općenito izraz $A \mid B_1 B_2 \dots B_n$ s premisama $B_1, B_2, \dots B_n$ i konkluzijom A, pod uvjetom da $B_1, B_2, \dots B_n$ ne smije biti logička ništica, ◐, silogizmom $\frac{B_1 B_2 \dots B_n}{A}$.

U glavi C (u poglavlju 9) odgovorit ćemo na prvo pitanje: Je li vertikalna crta $\mid$, u izrazu $A \mid B$ izjavni veznik kojim se tvori složena izjava $A \mid B$, i na drugo: U kakvoj je svezi $A \mid B$ sa zakonom uvjetne vjerojatnosti $w(A \mid B)$.

A. Opis B-teorije vjerojatnosti i usporedba s K-teorijom Od izjavne logike do vjerojatnosne logike

3. Osnovni elementi

3.1. Atomi, (izjavni) veznici i (dobro sagrađene) izjavne formule

Osnovu B-teorije čini *klasična (dvovaljana) logika izjavnih rečenica*, skraćeno *izjava*, KL, izgrađenih induktivno od beskonačnog skupa predočenog nizom *osnovnih izjava* ili *atoma* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots$ pomoću konačnog skupa izabranih *osnovnih izjavnih veznika* ili *operacija*: **ne**-, **i**- i **ili**-operacije. Pri tome se služimo okruglim zagradama pri svakom koraku tvorbe složene izjave predočene (*dobro sagrađenom*) *izjavnom formulom*, skraćeno *formulom*, primjenjujući po jedan par zagrada, lijevu slijeva i desnu zdesna. Nebitno je ali praktično primijeniti pravila za skraćivanje formula. (Osim ovog sustava tvorbe „s vanjskim zagradama" postoji i sustav „s unutarnjim zagradama" i „bez zagrada".)

Jednoargumentna izjavna **ne**-*operacija (nijekanje)* svakom atomu ili već izgrađenoj formuli A pridjeljuje složenu formulu **ne**- A (*nijek, negaciju*, $\overline{A}, -A, \neg A$).

Dvoargumentne izjavne operacije su: **i**-*operacija (množenje, sastavljanje)* i **ili**-*operacija (zbrajanje, rastavljanje)*, i to *uključiva (inkluzivna)* u smislu latinskog „vel", a ne *isključiva (ekskluzivna)* po latinskom „aut".

Svakoj već izgrađenoj složenoj formuli A i B (uključujući slučaj jednog ili oba atoma) **i**-operacija pridjeljuje složenu izjavu A **i** B (*umnožak* $A \cdot B$, skraćeno AB, *sastav, konjunkciju,* $A \wedge B$), a **ili**-operacija pridjeljuje složenu izjavu A **ili** B (*zbroj* $A + B$, *rastav, alternaciju*, A ili B (ili oboje), $A \vee B$).

Slovom $\mathbb{L}$ označit ćemo skup svih izjavnih formula.

Prema potrebi se služimo i *izvedenim izjavnim operacijama* ili *izvedenicama* određenim osnovnim: $A \to B$ je izvedenica od $\overline{A}+B$, $A \leftrightarrow B$ od $(A \to B)(B \to A)$, ◐ (*logička ništica, nula, laž, osnovno proturječje, kontradikcija*) od $A\overline{A}$ i $\mathbf{1}$ (*logička jedinica, istina, osnovno surječje, dikcija*) od $A+\overline{A}$, bilo za koju formulu A.

3.2. Dokazivost i valjanost

Nadalje se definira pojam *dokazivosti* formule i *dokaza*, moguće uz zadane formule *pretpostavke.*

Tvrdnja da je formula A *(formalno) dokaziva* zapisuje se oznakom $\vdash A$ i kaže se da je A *(formalan) poučak (teorem).*

U tu se svrhu odabere jedan od mnogo poznatih aksiomatičkih sustava, primjerice onaj s *aksiomima* i posebnim *pravilom zamjene* ili sa *shemama aksioma* i, u oba slučaja, s posebnim *pravilom modus ponens* $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ s *premisama* A i $A \to B$ te *konkluzijom* B. Najbolji u svakom pogledu je Gentzenov izvorni sustav *prirodnog zaključivanja* samo s *pravilima uvođenja* i *isključivanja* veznika ili pak njegova prilagodba aksiomatičkom sustavu.

Svi se takvi *sintaktički sustavi* temelje na načelu teorijskog odražavanja intuitivno spoznajnih bitnih svojstava svakog veznika uz moguće teorijsko odstupanje.

Semantički sustav definira *(istinosnu) valjanost* formule, a temelji se na *tablicama istinosnih vrijednosti* 0 i 1, skraćeno rečeno na *istinosnim tablicama,* pridruženim osnovnim operacijama nijekanja, množenja i zbrajanja.

Tvrdnja da je formula A *(istinosno) valjana* zapisuje se oznakom i kaže se da je A *tautologija.*

Sintaktički sustav dokazivosti obično ima svojstvo *suglasnosti* sa semantičkim sustavom valjanosti, ali mogući su i krnji podsustavi. Poučak o suglasnosti: za svaku izjavu A i B, $\vdash A \Leftrightarrow \vDash A$, $A \vdash B \Leftrightarrow A \vDash B$, tj. iz dokazivosti A slijedi valjanost A, i obrnuto, te iz dokazivosti B pod pretpostavkom A slijedi valjanost B pod pretpostavkom A, i obrnuto. Znak $\Leftrightarrow$ je neklasičan veznik povezivanja dviju tvrdnji, a može se čitati „*onda i samo onda ako*" i također „*nužan i dovoljan uvjet za*".

3.3. Podjednakost, razredi i razredni predstavnici

3.3.1. Podjednakost

Usporedno s KL i skupom svih izjavnih formula, $\mathbb{L}$, umjesto skupa izjavnih formula uporabljuju se *osnovni* i *izvedeni zakoni booleovske algebre logike*, BAL. Osnovu BAL čini pojam *podjednakosti (ekvivalentnosti) dviju izjava predočenih formulama A i B.*

Prema definiciji formule A i B su *podjednake (ekvivalentne)*, u oznaci $A \approx B$, ako je formula $A \leftrightarrow B$ dokaziva, $\vdash A \leftrightarrow B$, ili valjana, $\vDash A \leftrightarrow B$.

Namjera je izgraditi takav *logički* aksiomatički sustav *podjednakosti* koji se naziva *sustav (formalnih) jednakosti* s uobičajenom oznakom umjesto , da se s malim brojem odabranih *osnovnih jednakosti, aksioma* BAL, i *pravilima izvođenja složenih jednakosti: povratnosti (refleksivnosti)*, *zrcaljenja (simetričnosti)* i *prelaznosti (tranzitivnosti),* izvedu sve ostale jednakosti. (Vidi poglavlje 18, pravila 7 i 8.) Takvih sustava ima već nekoliko stotina, a prvi takav sustav predložio je Boole 1847. i 1854., a malo ga je izmijenio Peirce 1885.

Obično se sve međusobno podjednake izjave *poistovjećuju (identificiraju)* i jedna od njih se po volji odabere kao njihov *predstavnik (reprezentant)*. Tada se, gledano očima odnosa podjednakosti, ti odabrani predstavnici nazivaju *sudovi (propozicije)*. Tako se od logike izjava i izjavnih formula prelazi na *logiku sudova* i *sudovnih formula* s istim veznicima.

Važno je istaknuti da se ovdje radi o *konkretnom logičkom sustavu*, a ne o *apstraktnom algebarskom sustavu booleovske algebre,* B▲, koja se često naziva *Booleova algebra*. Zato taj konkretni sustav nazivamo BAL ili, skraćeno, *booleovska logika*, B▙.

3.3.2. Razredi i razredni predstavnici

Ako se promatraju tzv. *razredi međusobno podjednakih formula*, pri čemu se za svaku formulu A razred u kojem je A označava oznakom $[A]$ tada se A naziva *predstavnikom (reprezentantom)* razreda $[A]$ Skup svih razreda ili pridruženih predstavnika označava se ▙$/\approx$.

Nadalje, ako se razredi urede slično kao u KL, tj. ako se definiraju algebarske operacije $\overline{[A]} := [\overline{A}]$, $[A][B] := [AB]$ i $[A]+[B] := [A+B]$, tada *podjednakost formula* A i B i pripadni zakoni KL prelaze u *pravu jednakost razreda,* $[A]=[B]$, i pripadne zakone *algebre Lindenbauma i Tarskog*, skraćeno *Lindenbaumove algebre,* L▲. Na taj se način od logike izjava i izjavnih formula, KL, prelazi na *algebru sudova i sudovnih formula,* L▲, s algebarskim operacijama, umjesto s veznicima, isto označenim.

3.4. Usporedba s K-teorijom

U K-teoriji umjesto izjava i izjavnih formula, , i sudova i sudovnih formula, ▙$/\approx$, stoje *(slučajni) događaji* tumačeni *skupovima*, i to *podskupovima* tzv. *prostora (slučajnih) ishoda,* Ω, koji u konačnom slučaju odgovaraju konačnom skupu atoma i pridruženom skupu *interpretacija* ili *valuacija*, a u diskretnom i općem slučaju beskonačnom skupu atoma. Bitna je razlika što u K-teoriji umjesto konkretne B▙ stoji apstraktno *polje* ili σ-*polje događaja*, tj. *algebra događaja*, B▲.

3.5. Elementi višeg reda

Osim izjava i sudova u B-teoriji postoje još i *uređeni parovi izjava* ili *sudova* A *i* B koji se nazivaju *uvjetne (kondicionalne)* izjave ili sudovi ili još bolje *silogističke pogodbe (kondicionali)* „ A pod uvjetom B ” ili „ A ako B ” i označavaju vertikalnom crtom odvajajući *konkluziju* A od *premise* B kao u (1).

(1) $A \mid B$.

Konkluzija A može biti bilo koja izjava ili sud, a isto tako i premisa B, ali ona ne smije biti logička ništica $\mathbb{O}$. Osim jednočlanih premisa mogu stajati i višečlane premise $B_1, B_2, ..., B_n$, $n \geq 2$ ali one se uvijek tumače njihovim umnoškom , koji mora biti $\neq \mathbb{O}$.

Oznaka (1) samo upućuje na tradicionalni silogizam, a ovdje se radi o poopćenju prema kojemu se već sama oznaka u starijih autora intuitivno tumačila *stupnjem prihvatljivosti (plauzibilnosti)* ili *uvjerljivosti* zaključka da *iz pretpostavke istinosti* B *slijedi istinost* A i da se taj stupanj može izraziti nenegativnim realnim brojem.

Danas je uobičajeno služiti se funkcijskim prefiksom (od *plausibility*) i stupanj prihvatljivosti pridružen silogističkoj pogodbi (1) označiti zapisom (2).

(2) $pl(A \mid B)$.

Znanstveno-matematička analiza pojma stupnja prihvatljivosti, na temelju prototeorijskih postulata o silogističkim pogodbama $\overline{A} \mid C$ i $AB \mid C$ (vidi glavu D, poglavlje 11), dovodi u svakom od ta dva slučaja, prvo, do *funkcionalnih jednadžaba* Abelove vrste i, drugo, do njihovog rješavanja uz određene dogovore, posebice o normiranju, i do završnih jednakosti koima se izražavaju stupnjevi prihvatljivosti te dvije silogističke pogodbe. Tek tada se ti stupnjevi prihvatljivosti nazivaju *vjerojatnosna mjera* ili, kratko, *vjerojatnost* ili *vjerojatnoća* i označavaju zapisom (3) s funkcijskim prefiksom pr ili p (od *probability*).

(3) $pr(A \mid B)$ ili $p(A \mid B)$.

Ponekad se umjesto (3) rabi oznaka s prefiksom w (od *Wahrscheinlichkeit*) kojom ćemo se mi koristiti i za *bezuvjetne (apsolutne)* i za *uvjetne (relativne)* vjerojatnosti: $w(A)$ i $w(A \mid B)$.

Za daljnji razvitak B-teorije važne su w-formule za $w(\overline{A} \mid C)$ i $w(AB \mid C)$, tzv. *aksiomi B-teorije*.

3.6. Jaynesov dogovor

Već je rečeno da se pretpostavlja da u silogističkoj pogodbi $A \mid B$ premisa B ne smije biti proturječna (lažna, kontradiktorna), $B = \mathbb{O}$, tj da mora biti neproturječna, (4). Taj zahtjev nazivamo *Jaynesov dogovor* i označavamo ga *J-dogovor*.

(4) = J $B \neq \mathbb{O}$.

On vrijedi i za složenu premisu $B_1 B_2 \cdots B_n$ zahtijevajući da premise $B_1, B_2, ..., B_n$ ne smiju biti međusobno proturječne, $B_1 B_2 \cdots B_n = \mathbb{0}$, tj da mora biti $B_1 B_2 \cdots B_n \neq \mathbb{0}$.

Podjednako s (4) je da $\overline{B}$ ne smije biti izvjesna (istinita) premisa, $\overline{B} = \mathbb{1}$, tj. da mora biti neizvjesna, (5).

(5) $\qquad \overline{B} \neq \mathbb{1}$.

Prema Jaynesu se također svakoj silogističkoj pogodbi $A \mid B$ ili uvjetnoj vjerojatnosti $w(A \mid B)$ iza premise B, ako postoji, ističe jedna *stalna premisa* C koja može sadržavati i više važnih pojedinačnih premisa, a ako B ne postoji, C stoji neposredno iza vertikalne crte. Taj ćemo dogovor, kao i mnogi suvremeni bayesovci, odbaciti ne primjenjujući ga.

3.7. Usporedba s K-teorijom i normalno ograničenje Kolmogorova

Ni u K-teoriji zapisi oblika $A \mid B$ s događajima A i B nisu formalno teorijski određeni nego postoje u svezi s *realnom vjerojatnosnom mjerom* ili, skraćeno, s *vjerojatnošću* $w : \mathbb{F} \to [0,1]$ na σ-polju ili algebri događaja $\mathbb{F}$, a u tom se slučaju vjerojatnost definira realnom aritmetičkom w-formulom (6), uz *ograničenje* (7).

(6) = (UV) $\qquad w(A \mid B) := \dfrac{w(AB)}{w(B)}$.

(7) = K $\qquad w(B) > 0$.

Vjerojatnost $w(A \mid B)$ u (6) naziva se *uvjetna vjerojatnost* A *pod uvjetom* B, (UV), uz ograničenje (7) koje se naziva *normalno ograničenje Kolmogorova* ili skraćeno *K-ograničenje*.

Istaknimo da iz (7) slijedi (4), a u konačnom i diskretnom slučaju u K-teoriji vrijedi i obrat, tj. da iz (4) slijedi (7). U općem pak slučaju (7) je jače ograničenje od (4).

U svrhu ovog preglednog članka, budući da se radi uglavnom samo o konačnom slučaju u B-teoriji, a također budući da ostali uobičajeni aksiomi i zakoni bez uvjetnih vjerojatnosti vrijede bez tih ograničenja, možemo smatrati ograničenja (4) i (7) podjednakim.

Očevidno je da iz (6) slijedi (8).

(8) $\qquad w(AB) = w(A \mid B) w(B)$,

ali da iz (8) ne slijedi (6), nego slijedi samo uz K-ograničenje (7).

4. Aksiomi i poučci

4.1. Pravilo nijeka i umnoška

U B-teoriji Coxa i Jaynesa postoje samo dva aksioma: jedan zovemo *pravilo nijeka* (9), koje se primjenjuje i u podjednakom obliku (10), a drugi zovemo *pravilo umnoška* (11) koje se primjenjuje i u podjednakom obliku (12).

(9) = (N) $w(\overline{A}) = 1 - w(A)$.

(10) = (N’) $w(A) + w(\overline{A}) = 1$.

(11) = (U) $w(AB) = w(A \mid B)w(B)$, uz J-dogovor, tj. $B \neq ◐$.

(12) = (U’) $w(AB) = w(A \mid)w(B \mid A)$ uz J-dogovor, tj. $A \neq ◐$.

4.2. Bayesov poučak

Iz (U) i (U’) slijedi znameniti Bayesov poučak, BP, koji je u svom najjednostavnijem obliku ili u Laplaceovom poopćenju zvan Bayes-Laplaceov poučak, B-LP, sržni dio suvremene primjene B-teorije, može se reći *credo bayesovstva* (*bayesinizma*).

(13) = BP $w(A \mid B) = \dfrac{w(A)}{w(B)} w(B \mid A)$, uz K-ograničenje $w(A) > 0 \,\&\, w(B) > 0$.

4.3. Opće i posebno pravilo zbroja

U B-teoriji Coxa i kasnije Jaynesa još se ističu dva poučka: *opće pravilo zbroja* (14) i *posebno pravilo zbroja* (15).

(14) = (Z) $w(A + B) = w(A) + w(B) - w(AB)$

(15) = (Z’) $w(A + B) = w(A) + w(B)$, uz ograničenje $w(AB) = 0$.

Pravila (Z) i (Z’) su podjednaka, a to se lako dokazuje, ali sam dokaz pravila (Z) u aksiomatičkom sustavu Coxa i Jaynesa nije jednostavan. Da bi ga netko ostvario, taj bi morao biti vrlo spretan i morao bi imati u nekoj mjeri opće stvaralačke sposobnosti matematičko-logičkog dokazivanja. Ispravnost pak ostvarenog dokaza lako se provjerava (vidi poglavlje 5).

Pravilo (Z’) zapravo je *pravilo isključivog zbroja*, tj. *prave disjunkcije* označene primjerice $A \dotplus B$.

4.4. Pravilo jedinice i ništice

Ovaj ćemo kratki opis B-teorije prema Coxu i Jaynesu završiti dvama podjednakim pravilima: *pravilom logičke jedinice* (*izvjesnosti*, *istine*, *surječja*) (16) i *pravilom logičke ništice* (*laži*, *proturječja*) (17).

(16) $= (\mathbf{1})$ $w(\mathbf{1}) = 1$.

(17) $= (◐)$ $w(◐) = 0$.

Prvo pravilo $(\mathbf{1})$ slijedi neposredno temeljem pravila (Z’) i (N’), a drugo $(◐)$ tada zbog $A\overline{A} = \overline{\overline{A} + A}$ i $\overline{\overline{A}} = A$ temeljem (N) i $(\mathbf{1})$.

4.5. Opća pravila

Opća pravila (U_n), (B-LP_n), (Z_n) i (Z'_n), za $n \geq 2$, dokazuju se lako kao u K-teoriji.

4.6. Usporedba s K-teorijom

U K-teoriji pravila (N), (N’), (◐) i (Z) su poučci, a (Z’) (*aditivnost*) i (▮) (*normiranost*) su aksiomi. Pravila (U) i (U’) su neposredne posljedice uvjetne vjerojatnosti.

4.7. Alternativni aksiomatički sustavi

U [Williamson 2009] osnovni veznici i pripadne izjave su nijek, $\overline{A}$, i pogodba, $A \rightarrow B$, a pomoću njih su izražene izjave AB, $A+B$, ◐ i ▮. Č*isti* dio sustava, tj. bez pravila (U), kao aksioma, ili iz njega izvedenog jačeg aksioma ili definicije (UV), uz K-ograničenje, ima samo jedan opći aksiom ujedinjujući pravilo (▮) i pravilo (Z_n’).

Suvremeni bayesovci uglavnom rabe aksiome (w1) i (w2) i definiciju (w3), primjerice u [Paris & Vencovská 2001], koju neki zbog sveze s aksiomom (U) ili (U’) nazivaju također aksiomom, primjerice u [Howson & Urbach 2006].

(18) = (w1) $\quad w(▮) = 1$.

(19) = (w2) $\quad w(A+B) = w(A) + w(B)$, uz ograničenje $w(AB) = 0$.

(20) = (w3) $\quad w(A \mid B) = \dfrac{w(AB)}{w(B)}$ uz K-ograničenje tj. $w(B) > 0$.

5. Dokazi pravila zbroja

U objašnjenjima se ističu primjene pravila (N), (U) i (U’), a ako se pravila umnoška primjenjuju zdesna ulijevo, ta se primjena označava =(U) i =(U’). Primjena booleovske algebre u smislu „algebre logike” označava se BL, a primjena realne aritmetike AR.

5.1. Coxov dokaz [Cox 1946]

Izvorno Coxovo znakovlje nije pogodno za ovaj pregledni članak.

5.2. Jaynesov dokaz [Jaynes 2003]

Prema našem općem dogovoru o izostavljanju stalne premise, izostavit ćemo je, a izvorni prefiks p zamijenit ćemo u svim izrazima prefiksom w.

	$w(A+B \mid)$	
1	$= w(\overline{\overline{A}\overline{B}} \mid)$	BL
2	$= 1 - w(\overline{A}\overline{B} \mid)$	(N)
3	$= 1 - w(\overline{A} \mid) w(\overline{B} \mid \overline{A})$	(U’)
4	$= 1 - w(\overline{A})(1 - w(\overline{B} \mid \overline{A}))$	(N)
5	$= 1 - w(\overline{A}) + w(\overline{A}) w(B \mid \overline{A})$	AR
6	$= 1 - (1 - w(A)) + w(\overline{A}B)$	(N), = (U’)
7	$= w(A) + w(\overline{A} \mid B) w(B)$	AR, = (U)

8 $= w(A) + (1 - w(A \mid B))w(B)$ (N)

9 $= w(A) + w(B) - w(A \mid B)w(B)$ AR

10 $= w(A) + w(B) - w(AB \mid)$ (U)

dakle

11 $w(A + B \mid) = w(A \mid) + w(B \mid) - w(AB \mid)$ AR QED

5.3. Primjedba

U izvornom Jaynesovom dokazu ima samo šest jednakosti: 2, 3, 4, 7, 8 i 10; a u 2 je pogrešno otisnuto $\overline{AB}$ umjesto ispravnog $\overline{A}\overline{B}$.

5.4. $\boldsymbol{w}$-baze

U klasičnoj izjavnoj logici **ne**- i **i**-operacija čine tzv. *Bazu*, što znači da su sve ostale izjavne operacije izrazive pomoću tih dviju, a bez jedne ili druge to već ne vrijedi. Osim ove, ima i drugih baza.

U B-teoriji Coxa i Jaynesa bitno je pravilo umnoška (U) jer sadrži *pravu* w*-pogodbu*, tj. barem s jednom premisom. Zato su jedino važne one baze koje s množenjem čine bazu – to su tzv. w*-baze*; (N) i (U) čine w-bazu.

Sustav nezavisnih aksioma (N) i (U) nije slučajno izabran, nego je to odraz temeljitog promišljanja.

B. Metodički osvrt

Prirodno je pitanje o pozadini teorije vjerojatnosti, o njezinoj teorijskoj i praktičnoj motivaciji, o pristupu i izgradnji teorije, o matematičkom, metodološkom i filozofskom promišljanju, o naravi i spoznajnoj vrijednosti vjerojatnosti te o metodici nastave vjerojatnosti u obrazovnom sustavu na svim razinama.

Sve se to može uvidjeti iz povijesti postanka i razvitka pojma vjerojatnosti kroz vjekove, s početka u najtjesnijoj svezi s pojmom *mjere slučajnosti* pojava, a kasnije s pojmom *mjere količine dostupnih obavijesti* o pojavama i osobnog odnosa prema toj mjeri.

Ovdje ćemo raspraviti dva jednostavna pozadinska *slučaja teorijske ili matematičke vjerojatnosti* konačnog broja izjava ili sudova ili slučajnih ishoda koji upućuju na opće zakone vjerojatnosti, posebice na aksiome. Oba su slučaja prilagođena probabilističkoj logici. Prvi, *Laplaceov slučaj*, najosnovniji je i primjenjuje se pod najjačim ograničenjima. Drugi, *elementaran slučaj Kolmogorova,* malo je općenitiji i neposredno se nadovezuje na prvi.

Raspravit ćemo također najstariji *slučaj empirijske* ili *statističke vjerojatnosti,* tj. *slučaj (relativne) učestalosti.*

6. Laplaceov račun vjerojatnosti

6.1. Laplaceove pretpostavke

Osnovni pojam u Laplaceovom slučaju je *jednaka vjerojatnost istinosnih tumačenja (valuacija, interpretacija) konačnog broja atoma* sadržanih u promatranoj izjavi ili sudu, što je slabiji pojam od *mjere vjerojatnosti*, a može se primijeniti na svaku izjavu ili sud.

Na toj se osnovi dolazi na *Laplaceovu definiciju vjerojatnosti* i na *zakone vjerojatnosti* koji su *po obliku* upravo *opći zakoni vjerojatnosti.*

Evo, u nastavku ćemo opisati kako se izgrađuje Laplaceov račun vjerojatnosti izjava ili sudova u B-teoriji.

U primjeni se Laplaceov izvorni račun u prostoru *konačno mnogo (slučajnih) jednakovjerojatnih ishoda* u K-teoriji oslanja na pojmove i poučke matematičke grane zvane *kombinatorika*. Primjerice, rješavaju se zadaci poput sljedećih: Kolika je vjerojatnost da se u tri bacanja kocke ne pokaže *nijedna* šestica; da se pokaže *točno jedna, točno dvije, sve tri šestice*; da se pokaže *najviše jedna, najviše dvije* šestice; da se pokaže *najmanje (barem) jedna, najmanje dvije* šestice? A kako se ti zadaci rješavaju u vjerojatnosnoj logici? Što je prostor *jednakovjerojatnih istinosnih valuacija (interpretacija)*?

6.2. Opis istinosnih tablica i pripadne računske metode. Tablica 1

Zamislite *tablicu istinosnih vrijednosti* 0 i 1 izajve A koja sadržava v atoma $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_v$. Ta tablica ima dva dijela: lijevi ulazni i desni izlazni. Lijevi dio sadržava, gledajući retke ispod atoma, sve tzv. *istinosne valuacije* ili *interpretacije* atoma istinosnim vrijednostima 0 i 1, a desni sadržava, gledajući stupac ispod izjave A, sve istinosne vrijednosti $t_{1,} \ldots, t_{2^v}$ koje proizlaze postupnim računanjem prema osnovnim istinosnim tablicama svakog izjavnog veznika u A.

$\alpha_1 \ldots \alpha_v$	A
....	...

Osim tablične glave, svi redci ispod glave, a ima ih 2^v, ispunjeni su istinosnim vrijednostima 0 i 1. (Vidi Tablicu 1.)

Sada gledajte sve retke ispod izjave A u kojima je upisana istinosna vrijednost 1 i izbrojite koliko ukupno ima takvih redaka. Nazovite taj ukupan broj *brojem povoljnih slučajeva* i označite ga oznakom $\#(A)$

Tada je vjerojatnost $w(A)$ izjave A prema Laplaceu jednaka $\frac{\#(A)}{2^v}$

Tablica 1. s v = 3 (vjerojatnost prema Laplaceu)

α_1	α_2	α_3	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$w(A)=\frac{3}{8}$$

Ovdje je jedino upitno postoji li takva izjava A da ispod nje stoji navedeni stupac istinosnih vrijednosti. Potvrdan odgovor slijedi iz sljedećeg poučka.

Svaki zadani stupac 2^v istinosnih vrijednosti 0 i 1, barem s jednom istinosnom jedinicom, jednoznačno određuje izjavu A^* u *savršenom* $\Sigma\Pi$ *-normalnom obliku* koja pod sobom ima upravo zadani stupac.

Dakle, postoji takva izjava, i to je A^* . Za podrobnosti vidi podpoglavlje 6.4.

6.3. Zadaci s uputama

Metodom istinosnih tablica dokaži ispravnost sljedećih poznatih w -formula.

1) $w(\mathbf{1})=1$; $w(\mathbf{0})=0$; $w(\overline{A})=1-w(A)$;

2) $w(A+B)=w(A)+w(B)$ uz ograničenje $AB=\mathbf{0}$;

3) $w(A+B)=w(A)+w(B)-w(AB)$;

4) $w(A\mid B)=\frac{w(AB)}{w(B)}$ uz K-ograničenje $w(B)>0$.

Uputa k 1): $\#(\mathbf{1})=2^v$; $\#(\mathbf{0})=0$; $\#(\overline{A})=2^v-\#(A)$

Uputa k 2): Ograničenje $AB=\mathbf{0}$ zabranjuje da u retcima ispod A i B stoje dvije istinosne jedinice, tako da su retci s 1 u A i retci s 1 u B odvojeni, zato je $\#(A+B)=\#(A)+\#(B)$.

Uputa k 3): Sada retci općenito nisu odvojeni nego se preklapaju, zato je $\#(A+B)=\#(A\overline{B})+\#(AB)+\#(\overline{A}B)=\#(A)+\#(B)-\#(AB)$.

Uputa k 4): Gledaj sve one retke u kojima je u stupcu ispod B istinosna vrijednost 1 i izbroj ih označujući taj broj oznakom $\#(B)$ zatim ponovo gledaj sve te retke i izbroj koliko samo u tim retcima, dakle ovisno o B, ima u stupcu ispod A istinosnih vrijednosti 1; zaključi da ih ima isto toliko koliko ih ima u stupcu ispod AB i označi taj broj oznakom $\#(AB)$ podijeli $\#(AB)$ s $\#(B)$ i završno proširi taj razlomak $\frac{\#(AB)}{\#(B)}$ s $\frac{1}{2^v}$.

6.4. Poučci o savršenom $\Sigma\Pi$ -normalnom obliku izjava

I. Oblikovanje izjave A^* iz zadanog stupca istinosnih vrijednosti ispod izjave A u kojem nastupa barem jedanput vrijednost 1.

Pridruži svakoj vrijednosti 1 iz zadanog stupca i retka u kojem se nalazi ta istinosna jedinica isti redak ispod atoma (vidi strjelice u Tablici 1) i tada postupi i u općem slučaju kao što je postupljeno u ovom posebnom primjeru gledajući Tablicu 1:

$$A^* = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 .$$

II. Oblikovanje izjave A^* iz zadane izjave A.

Načini tablicu istinosnih vrijednosti izjave A ovisno o istinosnim vrijednostima atoma (vidi Tablicu 1) i tada primijeni postupak I.

III. Prema I i II, svaka je izjava A ako je $A \neq \text{◐}$, jednaka izjavi A^* pridruženoj izjavi A. Ako je pak izjava $A = \text{◐}$, onda je također, prema dodatnom dogovoru, pridružena izjava $A^* = \text{◐}$.

IV. *Jednake* izjave imaju *isti* savršeni $\Sigma\Pi$ -normalni oblik. Zato ti normalni oblici svih izjava čine *sustav predstavnika razreda međusobno jednakih izjava*, tj. čine *sustav sudova*. Taj sustav ima 2^{2^v} sudova.

6.5. Istinosne funkcije. Tablica 2

Izmjenom u istinosnoj tablici s atoma tako da atome $\alpha_1,...,\alpha_v$ zamijenimo *istinosnim promjenljivim (varijablama)* $x_1,...,x_v$ koje primaju istinosne vrijednosti 0 i 1, i sudove $A_1,...,A_{2^{2^v}}$ zamijenimo *istinosnim funkcijama* $F(x_1,...x_v): F_1,...,F_{2^{2^v}}$ tada svaka funkcija F pridružuje svakom retku ispod promjenljivih, tj. svakoj uređenoj v -torki vrijednosti 0 i 1, vrijednost 0 ili 1 u istom retku i stupcu ispod nje. Tako je tom *tablicom istinosnih funkcija* svaka funkcija predočena 2^v -torkom istinosnih vrijednosti ispod nje. Standardno se kaže da su u slučaju $v = 3$ to *funkcije sa skupa* $\{0,1\}^{\times 3}$ *u skup* $\{0,1\}$ a općenito $F:\{0,1\}^v \to \{0,1\}$. (Vidi Tablicu 2.)

Tablica 2. s v = 3 (Istinosne funkcije)

x_1	x_2	x_3	F_1		...	F_{256}
0	0	0	0	0	...	1
0	0	1	0	0	...	1
0	1	0	0	0	...	1
0	1	1	0	0	...	1
1	0	0	0	0	...	1

x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	$\cdots$	F_{256}
1	0	1	0	0	...	1
1	1	0	0	0	...	1
1	1	1	0	1	...	1

6.6. Istinosni stupnjevi i kvantitativna logika Guo-Juna Wanga

U svezi s opisanim Laplaceovim računom vjerojatnosti izjava treba istaknuti da su kineski logičari iz Pekinga, G.-J. Wang i suradnici, već u [Wang, G.-J. et al. 2002] uveli pojam *istinosnog stupnja izjava*, a kasnije su još izgradili tzv. *kvantitativnu logiku* kao teoriju istinosnih stupnjeva izjava, $\tau(A)=\frac{\#(A)}{2^v}$, koja odgovara navedenom Laplaceovom računu, i postigli ne samo mnogo malih rezultata, kao što su oni navedeni u 1) – 3) u podpoglavlju 6.3, nego i vrlo zanimljivih velikih rezultata i u klasičnoj i u neklasičnim logikama.

6.7. Vjerojatnosne funkcije

Probabilistička logika temelji se na dvije vjerojatnosne funkcije.

Prva je *bezuvjetna (apsolutna)* vjerojatnosna funkcija $w:\mathbf{L}\to[0,1]$ jednog argumenta koja svakoj izjavi A iz $\mathbf{L}$ pridružuje realan broj $w(A)$ iz segmenta (zatvorenog intervala) $[0,1]$ tako da budu zadovoljena dva aksioma (w1) i (w2). (Vidi (18) i (19) u potpoglavlju 4.7.)

Druga je *uvjetna (relativna)* vjerojatnosna funkcija $w':\mathbf{L}\times\mathbf{L}'\to[0,1]$ dvaju argumenata koja svakom uređenom paru (A,B) izjava A i B, uz K-ograničenje $w(B)>0$, pridružuje realan broj $w'(A,B)$ u segmentu $[0,1]$ prema definiciji (w3), koji se uobičajeno zapisuje $w'(A\,|\,B)$ pomoću vertikalne crte odvajajući A od B, a čita se *vjerojatnost A pod uvjetom B* ili kratko vjerojatnost A *ako* B.

Oznaku w' ćemo od sada na dalje zamijeniti s w. (Vidi (20) u podpoglavlju 4.7.)

Ako se drugi argument B u $w(A\,|\,B)$ proglasi parametrom i zapis $w(A\,|\,B)$ zamijeni zapisom $w_B(A)$ to znači da se svakoj izjavi B, uz K-ograničenje $w(B)>0$, pridružuje prema (w3) po jedna funkcija $w_B(A)$ argumenta A.

Vrijedi sljedeći poučak. *Funkcija $w_B(A)$ za svako B, zadovoljava aksiome (w1) i (w2), tako da je $w_B(A)$ vjerojatnosna funkcija prvog argumenta A u $w(A\,|\,B)$*. (Ta se tvrdnja lako dokazuje.)

Vrijede također sljedeći poučci. *Neka su A, A_1, B i B_1 izjave u $\mathbf{L}$. Ako je $A=A_1$, tada je $w(A)=w(A_1)$; ako je $A=A_1$ i $B=B_1$, onda je također $w(A\,|\,B)=w(A_1\,|\,B_1)$*. (Vidi zadatak u poglavlju 22.7 glave H.)

Taj poučak omogućava prijelaz s probabilističke logike izjava (tj. s $\mathbf{L}$) na probabilističku logiku sudova (tj. na $B\mathbf{L}$), i obrnuto.

7. Elementaran račun vjerojatnosti Kolmogorova

7.1. Pretpostavke Kolmogorova. Tablica 3

U Laplaceovom računu s $v = 3$ sve su vjerojatnosti $w_i, i = 1, 2, ..., 8$, bile jednake, dakle logička jedinica **1** imala je vjerojatnost $\frac{8}{8} = \frac{1+1+...+1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8} = 1$, tako da je svakom retku ispod atoma prema istinosnom tumačenju bila pridružena vjerojatnost $\frac{1}{8}$, a zbroj svih vjerojatnosti bio je 1.

U elementarnom računu Kolmogorova vrijedi Laplaceova pretpostavka 1) o konačnom broju atoma, a umjesto pretpostavke 2) o jednakosti vjerojatnosti svih istinosnih valuacija vrijedi slabija pretpostavka 2*) o njihovom zbroju $w_1 + w_2 + ... + w_8 = 1$.

Općenito su vjerojatnosti $w_1, w_2, ..., w_{2^v}$ bilo koji realni brojevi iz (otvorenog) intervala $\langle 0,1 \rangle$ ali tako da njihov zbroj bude jednak istinosnoj jedinici 1, $\sum_{i=1}^{2^v} w_i = 1$. Nadalje, bilo za koju izjavu A gledamo kao i ranije one i samo one retke u istinosnoj tablici u kojima je ispod A istinosna vrijednost 1 i zbrojimo sve vjerojatnosti pridružene tim retcima u lijevom dijelu tablice. Taj zbroj je prema definiciji vjerojatnost izjave A, $w(A)$. (Vidi Tablicu 3 u kojoj je $w(A) = w_2 + w_4 + w_8$.)

Tablica 3. s v = 3 (elementarna vjerojatnost prema Kolmogorovu)

	α_1	α_2	α_3	...	A	...	**1**
$w_1 \leftarrow$	0	0	0 $\leftarrow$		t_1		1
$w_2 \leftarrow$	0	0	1		$t_2 = 1$		1
$w_3 \leftarrow$	0	1	0		t_3		1
$w_4 \leftarrow$	0	1	1 $\leftarrow$		$t_4 = 1$		1
$w_5 \leftarrow$	1	0	0		t_5		1
$w_6 \leftarrow$	1	0	1		t_6		1
$w_7 \leftarrow$	1	1	0		t_7		1
$w_8 \leftarrow$	1	1	1 $\leftarrow$		$t_8 = 1$		1

7.2. Zadatak

Izvedi sada aksiome (w1), (w2) i (w3).

7.3. Diskretna i opća teorija vjerojatnosti

Na žalost, ta se elementarna metoda ne može primijeniti u probabilističkoj logici već u narednom slučaju *prebrojivo beskonačno mnogo* atoma na način kako se to radi u tzv. *diskretnoj teoriji vjerojatnosti prema Kolmogorovu*, jer svaka izjava klasične logike sadržava samo konačno mnogo atoma. Diskretna teorija dakako više nije elementarna jer se oslanja na pojmove i zakone tzv. *niže matematičke analize,* tj. na teoriju beskonačnih nizova i redova te konvergencije.

U neklasičnoj logici s izjavama koje sadržavaju prebrojivo beskonačno mnogo atoma, „istinosna tablica" imala bi već *kontinuum beskonačno mnogo* redaka istinosnih tumačenja. Opća teorija vjerojatnosti tako prelazi u *višu* i *visoku matematičku analizu*, tj. u *opću teoriju skupova.*

8. Račun učestalosti

Pojam *učestalosti* neke prirodne, društvene, gospodarstvene itd. pojave oduvijek je zanimao ljude i u obliku mnogovrsnih statističkih činjenica bio je njegovan već u prvim civilizacijama. Čini se da je učestalost bila već od početka povezana s misaonim, ali ne i javno izrečenim ni sasvim jasnim pojmom *slučajnosti* i *vjerojatnosti* sve do 20. st.

Mjera učestalosti u obliku *relativne učestalosti (relativne frekvencije)* još se i danas naziva *iskustvena (empirijska, statistička) vjerojatnost* koja ponekad jedino daje *približne vrijednosti* teorijske vjerojatnosti.

Učestalost je nužno vezana za *ponovljive pojave*, kazat ćemo u *višestrukom ponavljanju pokusa*, koji se ispituju pod pretpostavkom da se ponavljanja odvijaju *stalno pod istim uvjetima* i da se razmotreni, reći ćemo *događaj*, može samo dogoditi ili ne dogoditi.

Za mjeru učestalosti uzima se čestina (frekvencija) razmatranog događaja E, $f_N(E)$, a to je broj $M(E)$ ponavljanja pokusa u kojima se dogodi događaj E, zvan *višestrukost (multiplicitet, apsolutna učestalost, apsolutna frekvencija)*, podijeljen sa sveukupnim brojem N ponavljanja pokusa:

$$F_N(E) := \frac{M(E)}{N}.$$

Iskustvena je činjenica

I. da se u jednom nizu pokusa pri sve većem broju N ponavljanja pokusa čestine svakog promatranog događaja kolebaju oko nekog gomilišta g;

II. prema Kolmogorovu, da se pri sve većem broju takvih nizova ponavljanja pripadna gomilišta $g_1, g_2, \ldots$ ponovo gomilaju oko nekog gomilišta G;

III. prema von Misesu, da je konvergencija prema g pri teženju $N \to \infty$ prilično brza (čime se iz razmatranja uklanjaju nizovi ponavljanja pokusa slabe konvergencije).

Statistička procjena očekivanog broja $M(E)$ u N ponavljanja pokusa je $Nf_N(E)$, a *teorijsko očekivanje* je $Nw(E)$.

Bitna razlika između računa učestalosti i računa i teorije vjerojatnosti leži u tome što se višestrukosti moraju stvarnim pokusima ustanoviti i čestine tek *a posteriori (aposteriorno)* izračunati, a vjerojatnosti se moraju *a priori (apriorno)* pretpostaviti ili izračunati iz pretpostavljenih tzv. *početnih vjerojatnosti*.

Zatim, račun učestalosti primjenljiv je samo na ponovljive pojave – pokuse, a račun i teorija vjerojatnosti nisu time ograničeni.

Sličnosti učestalosti i vjerojatnosti leže pak u tome što i jedna i druga pretpostavljaju slučajnost promatranih pojava-pokusa ili što se zbog prevelikog broja podataka o pojavama-pokusima oni ponašaju kao slučajni ili, u bayesinizmu, što nedostaju važne obavijesti o promatranim pojavama-pokusima, pa se sve to odražava tako da se *ne može unaprijed predvidjeti ishod*.

Teorija vjerojatnosti kao posebno matematizirana disciplina omogućava i matematički razvoj srodne joj discipline *matematičke statistike*. Račun učestalosti i tzv. *deskriptivna statistika* ostali su primjenljivi kao uvod u matematičku statistiku.

Pristup teoriji vjerojatnosti von Misesa putem misaonog beskonačnog ponavljanja pokusa i pripadnog beskonačnog niza čestina promatranog događaja, što bi otklonilo zavisnost čestina od konačnog broja ponavljanja *N*, naišao je na velike poteškoće i negativnu kritiku matematičara i filozofa tako da se danas tim pristupom teoretičari vjerojatnosti više ne koriste, osim u metodičke svrhe, ali je ostavio znatan trag u prošlosti i u suvremenosti preko *teorije slu*čajnih nizova i *složenosti izračunljivih procesa* tj. *algoritama.*

C. Kritički osvrt

Već prije deset godina objavljen je dodatak *Elementi simboličke logike* D. Lauca srednjoškolskom udžbeniku *Logike* G. Petrovića kao doprinos osuvremenjavanju nastave logike, a prošle je godine taj projekt znatno proširen u trodijelnom udžbeniku D. Lauca i Z. Šikića. (Vidi [Lauc 2004] i [Lauc & Šikić 2014].)

Prvi je dio naslovljen *Neformalna logika*. Smatram da bi naslov trebao biti *Tradicionalna logika* ili još bolje *Uvod u suvremenu simboličku (matematičku) logiku*. Naime, logika od samog postanka proučava *oblike (forme)* i *zakone* ispravnog mišljenja.

Drugi je dio naslovljen *Formalna logika*, što djeluje pleonastički. Smatram da takav naslov ima smisla samo ako se usporedno govori i o, primjerice, *dijalektičkoj logici* i da bi trebao biti kao već gore spomenuti i naveden u Laucovom *dodatku*.

Treći dio ima naslov *Logika i metodologija znanosti*. Smatram da bi podpodnaslovi Definicija i klasifikacija i Aksiomatski sustavi trebali biti premješteni u prvi dio, a Indukcija i vjerojatnost (opcionalno) i Naivna teorija skupova iz drugog dijela trebali bi biti možda s još nekim naslovom sakupljeni u novi dio *Primjena logike* smješten u treći dio, a treći dio nazvan četvrtim ili izostavljen i prebačen u filozofiju.

Oba udžbenika imaju, osim sasvim određenih vrlina, također i mnoštvo malih jezičnih i sintaktičko-logičkih grešaka, doduše popravljivih, ali i drugih manjkavosti koje treba ukloniti prepravljanjem. U svezi s tim treba istaknuti da je dvoautorski udžbenik preopširan, da je nedosljedan u osnovnom logičkom nazivlju i da je mjestimično logički i metodički nedorečen i pogrešan.

Ovdje ćemo raspraviti samo o tri konkretne kritičke primjedbe vezane za primjenu klasične izjavne logike u vjerojatnosnoj logici, a primjedbe vezane za primjenu proširene klasične piročne (predikatne) logike u naivnoj i aksiomatičkoj skupovnoj teoriji raspravit ćemo na drugome mjestu.

Još uvodno nekoliko primjedaba o metodici uvjetne vjerojatnosti $w(A\,|\,B)$, „ A ako B ".

Pojam uvjetne vjerojatnosti zauzima središnje mjesto u teoriji vjerojatnosti bilo kojeg pristupa na raskrižju prema pravoj teoriji vjerojatnosti ili prema teoriji mjere. Naime, bez tog bi pojma teorija vjerojatnosti bila samo djelić teorije mjere.

Poznati glavni pristupi uvjetnoj vjerojatnosti, bilo da se radi o teorijsko-skupovnom bilo o empiričko-učestalosnom, do sada nisu objašnjavali izraz $A\,|\,B$ na točan i jasan način, tj. radi li se tu o skupu pridruženom skupovima A i B ili o pokusu pridruženom pokusima A i B.

U prvoj polovici 20. st. pojavili su se sporadični radovi o logičkom pristupu teoriji vjerojatnosti na temelju *klasične izjavne (rečenične, sentencionalne) logike* i *booleovske* (prema Booleu iz 19. st.) *sudovne (propozicionalne) logike*, a već u 2. polovici 20. st., osobito pri kraju 20. st., znatno se razvila ta tzv. *bayesovska teorija vjerojatnosti* (prema Bayesu iz 18. st.), zvana i *bayesovska vjerojatnosna (probabilistička) logika* (za razliku od *Keislerove*) i njezine mnogobrojne primjene.

Treba također istaknuti da se nedavno u 21. st. počela zasnivati i istraživati vjerojatnosna logika na temelju *klasične piročne (predikatne) logike*.

Za ovaj je pregled i metodički prilog posebice zanimljiva tzv. *kvantitativna logika Guo-Juna Wanga* i njegovih kineskih suradnika iz Pekinga u kojoj se istražuje i razvija teorija *istinosnih stupnjeva* klasičnih, a kasnije i mnogih vrsta neklasičnih izjava. Naime, Wangovi istinosni stupnjevi motivirani su upravo *vjerojatnosnim stupnjevima*, pa se mogu tako i tumačiti pod znanim pretpostavkama, tj. ograničenjima:

1. konačnog broja atomarnih izjava

i

2. njihovih jednako vjerojatnih istinosnih valuacija (interpretacija) pomoću pridruženih istinosnih vrijednosti 0 (istinosne ništice) i 1 (istinosne jedinice).

Tada je ta jednostavna teorija u klasičnom slučaju zapravo Laplaceov račun čistih (bezuvjetnih, apsolutnih) vjerojatnosti primijenjen u ovom pregledu i u slučaju općenitijeg (bez 2. ograničenja) elementarnog računa Kolmogorova.

Ta elementarna metoda dakako nije primjenljiva već u neelementarnom *diskretnom slučaju* izjava s prebrojivo beskonačno mnogo atoma, a kamoli u *općem slučaju*. Ali ipak, znanstvena vrijednost te metode leži u njezinoj intuitivnoj jasnoći i logičko-matematičkoj točnosti te uvidu u zakone vjerojatnosti uz nužna ograničenja, doduše, pod znanim pretpostavkama 1. i 2. *Odbacujući te pretpostavke* dokazani zakoni se proglašavaju *aksiomima* teorije vjerojatnosti.

Jedino preostaje još neodgovoreno pitanje: kako objasniti na jasan i točan način uvjetnu vjerojatnost $w(A \mid B)$ bez ikakvog uvida o tome što znači $A \mid B$.

Za čudo, iako je metoda istinosnih valuacija već dugo poznata i stalno se primjenjuje u logici, a i u nekih autora, doduše samo za bezuvjetne vjerojatnosti, pa tako i u gimnazijskom udžbeniku logike [Lauc & Šikić 2014][3], ona ipak nije primijenjena u tom udžbeniku za uvjetne vjerojatnosti, nego je zakon uvjetne vjerojatnosti $w(A \mid B) = \frac{w(AB)}{w(B)}$ poslužen kao gotova poslastica. Pri tome, o $A \mid B$ *nema* ništa, o tome zašto baš tako također *nema* ništa, o nužnom ograničenju $w(B) > 0$ opet *nema* ništa.

9. Je li izraz $\boldsymbol{A \mid B}$ izjava? (događaj? pokus?)

Neki autori postavljaju to pitanje, a neki, bezuspješno pokušavajući, ne mogu na njega ispravnom argumentacijom odgovoriti, a jedino na temelju nepotpune i svojevrsne „metodičke" analize ipak odgovaraju da se taj izraz ne može tumačiti klasičnom (materijalnom) pogodbom (kondicionalom), iako se zna da ga bayesovci već odavno ispravno intuitivno tumače poopćenim tradicionalnim silogizmom.

9.1. Vertikalna crta neklasični je veznik, a izraz $\boldsymbol{A \mid B}$ neklasična je djelomično (parcijalno) istinosna izjava određena klasičnim izjavama $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$. Tablica 4 i Tablica 5

Intuitivna metoda istinosnih tablica, objašnjena u Laplaceovom slučaju, upućuje na sljedeći odgovor. Izraz $A \mid B$, koji u probabilističkoj logici (i standardnoj teoriji vjerojatnosti) predočava samo uređeni par izjava (događaja) A i B, uz J-dogovor $B \neq ◐$ odvajajući vertikalnom crtom *konkluziju* A od *premise* B (ili od nekoliko premisa tumačeći ih njihovim umnoškom) *jest izjava,* ali *neklasična*, istinosno ovisna o A i B, iako se do sada nije točno govorilo o vertikalnoj crti kao *neklasičnom izjavnom vezniku* povezujući dvije klasične izjave A i B ni o istinosnom značenju složene neklasične izjave $A \mid B$, A *pod uvjetom* B ili jednostavnije A *ako* B, nego samo o *uvjetnoj vjerojatnosti* $w(A \mid B)$, *uz K-ograničenje* $w(B) > 0$, kao o *dvoargumentnoj* vjerojatnosnoj funkciji određenoj prema definiciji ili aksiomu (w3) običnom *jednoargumentnom bezuvjetnom* vjerojatnosnom funkcijom određenom aksiomima (w1) i (w2).

Neklasična uvjetna izjava $A \mid B$, uz J-dogovor $B \neq ◐$, ima istinitosne vrijednosti 1 (istinosnu jedinicu) i 0 (istinosnu ništicu) kao i klasične izjave A i B, ali u onim i samo u onim redcima u kojima premisna izjava B ima istinosnu jedinicu 1, a inače, u ostalim retcima istinosne vrijednosti nisu definirane. Zatim, gledajući samo te retke u kojima B ima 1, A i $A \mid B$ imaju istinosne vrijednosti 1 ili 0 točno tako kako ih ima A.

Promatrani neklasični ulomak (fragment), samo s 3. i 4. retkom izmijenjene klasične potpune (totalne) istinosne tablice, s nedefiniranim 1. i 2. retkom, određuje istinosne vrijednosti neklasičnih izjava $A^{\sim}$, $B^{\sim}$ i $A^{\sim} \mid B^{\sim}$ pridruženih klasičnim izjavama A i B. Pri tome se dosadašnja vertikalna crta u ulozi odvajatelja konkluzije A od premise B (ili premisnog umnoška $B_1 B_2 \ldots$) tumači novim neklasičnim veznikom i označuje ga se novom oznakom $\Leftarrow$, a tada se i novi izraz $A^{\sim} \mid B^{\sim}$ jednostavno označuje $A \Leftarrow B$ ili istoznačnicom $B \Rightarrow A$. (Vidi Tablicu 4.)

Tablica 4. *(djelomična istinosna tablica neklasične izjave B ⇒ A)*

B	A	$B \Rightarrow A$
0	0	nedef.
0	1	nedef.
1	0	0
1	1	1

Očito je da vrijede sljedeće formule o broju istinosnih jedinica: $\#(A) > \#(A^{\sim}) > 0$, $\#(B) = \#(B^{\sim}) > 0$, i. $\#(AB) = \#(A^{\sim} B^{\sim}) > 0$.

U ovakvom tumačenju $w(A \mid B)$ tj. $w(A \Leftarrow B)$ više nije vjerojatnosna funkcija klasične logike dva klasična izjavna argumenta A i B, uz K-ograničenje $w(B) > 0$, nego vjerojatnosna funkcija neklasične dvovaljane logike jednog neklasičnog izjavnog argumenta $A \Leftarrow B$, ovisna o vjerojatnostima klasičnih izjava B i AB, $w(A \Leftarrow B) = \frac{w(AB)}{w(B)}$ prema (w3). (Vidi Tablicu 5.)

Tablica 5. s v = 3
(djelomične istinosne vrijednosti neklasičnih izjava B, A i B ⇒ A)

$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3$	B	A	$B \Rightarrow A$
...	...	...	...
$t_{i1} \ t_{i2} \ t_{i3}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$	b_i	a_i	$b_i \Rightarrow a_i := \begin{cases} \text{nedef.}, & b_i = 0 \\ 0 & b_i = 1 \,\&\, a_i = 0 \\ 1 & b_i = 1 \,\&\, a_i = 1 \end{cases}$
...	...	...	...

Na taj je način neklasična silogistička pogodba *poopćenje tradicionalnog silogizma* pripisujući mu istinosni stupanj u obliku vjerojatnosnog stupnja. To je jedan *konkretan sustav približnog zaključivanja* koji se istražuje u *općoj teoriji* približnog zaključivanja, u *fazi logici* ili *fazi-teoriji* (od *fuzzy*) i *teoriji umjetne inteligencije.*

Na sličan se način može odgovoriti da je izraz $A \mid B$ događaj $A_1 = AB$ u novom prostoru ishoda $\Omega_1 = B$ ili u novom pokusu ε_B određenom pokusom B.

9.2. Kontraimplikacija i implikacija

Zbog opisanog tumačenja, za razliku od klasične (materijalne, umjetne, formalno-teorijske) pogodbe (kondicionala, subjunkcije) kojoj odgovara *potpuna (totalna) istinosna tablica* i *funkcija*, neklasična izjava $A \mid B$ ili $B \Rightarrow A$ mogla bi se nazvati *prava (prirodna, sadržajno-teorijska)* pogodba ili *silogistička pogodba* od B k A i označiti $A \Leftarrow B$ umjesto $B \Rightarrow A$, a njoj odgovara *djelomična (parcijalna) istinosna tablica* i *funkcija neklasične dvovaljane logike*. (Vidi Tablice 4 i 5.)

Jednostavnije bi se ta silogistička pogodba $B \Rightarrow A$ ili $A \Leftarrow B$ od B k A mogla nazvati *kontraimplikacija*, a njoj zrcalno (simetrično) pridružena $A \Rightarrow B$ ili $B \Leftarrow A$ od A k B tada bi se mogla nazvati *implikacija.*

9.3. Je li upotpunjavanje djelomične tablice na potpunu, kojim se $A \mid B$ tj. $B \Rightarrow A$ ili $A \Leftarrow B$ upotpunjuje na AB, jednoznačno?

Odgovor je *odrečan*, *ne*, *nije* jednoznačno, ali ako se zahtijeva da se upotpunjavanjem ne promijeni broj istinosnih jedinica 1 u stupcu ispod $B \Rightarrow A$ onda je odgovor *potvrdan, da, jest* jednoznačno.

9.4. Zadatak

Koje su to klasične izjave koje upotpunjavaju djelomičnu tablicu mijenjajući broj istinosnih jedinica u stupcu ispod $B \Rightarrow A$?

9.5. Primjedba

Već u podpoglavlju 2.4 bila je uporabljena oznaka $\Rightarrow$ i pridružene oznake $\Leftarrow$ i $\Leftrightarrow$ za neklasične veznike vezano za tvrdnje, a u podpoglavljima 9.1 - 9.4 oznake $\Rightarrow$ i $\Leftarrow$ za neklasične veznike vezano za silogističke pogodbe. U svrhu razlikovanja mogu se za njih uvesti nove drugačije oznake, primjerice $\Rrightarrow$ i $\Lleftarrow$.

10. Primjena izjavne logike u vjerojatnosnoj logici u gimnazijskom udžbeniku logike [Lauc & Šikić 2014, 199-201]3

10.1. O uvjetnoj vjerojatnosti

U dvoautorskom udžbeniku autori objašnjavaju pojam i zakone vjerojatnosti metodom istinosnih tablica (valuacijom, interpretacijom) uz dobro poznata Laplaceova ograničenja. Prvo, konačnost tih istinosnih valuacija zajamčena je konačnim brojem atoma sadržanih u svakoj izjavi. Drugo, pretpostavlja se jednaka vjerojatnost svih valuacija.

I za čudo, kada se dolazi do središnje nastavne teme o uvjetnoj vjerojatnosti, autori metodički zakažu jer navedu samo formalno gotovu formulu bez sadržajnog objašnjenja kojim su objasnili ostale zakone, tako da ta formula $w(A \mid B) = \frac{w(AB)}{w(B)}$ kao da je *pala s neba*. Pri tome, na žalost, ne navode ni bitno K-ograničenje $w(B) > 0$. A o izrazu $A \mid B$ nema ni riječi.

Ne znaju li autori o čemu se ovdje radi ili smatraju da školska djeca to ne trebaju doznati? Na prirodno pitanje što je $A \mid B$, je li to izjava (događaj ili pokus), nema ama baš nikakvog odgovora.

10.2. O neumjesnosti prijenosa svojstava logičke pogodbe na „vjerojatnosnu pogodbu"

Autor u svom izuzetno kratkom apstraktu [Šikić 2014, 40] kaže da će „dokazati" da bi prijenos svojstava (logičke) pogodbe na „vjerojatnosnu pogodbu" (valjda na uvjetnu vjerojatnost) bio neumjesan, a u gore navedenom dvoautorskom udžbeniku bi se vjerojatno trebalo vidjeti što bi to uopće trebalo značiti, ali se ne vidi niti se može vidjeti.

Naime, objašnjava se dvjema „krajnostima" tj. rješavaju se zadaci: Kolika je vjerojatnost

1) p ako q, ako $q \to p$,

i

2) p ako q, „kada" su p i q „inkompatibilni", „kada" $q \to \neg p$.

I tada se izvodi vratolomija: s prvim „ako" i drugim „ako" u 1) te nadalje u 1) i 2) ako – kada, koso pisano – obično pisano, premisa – valjana izjava, i to bez ikakvog spoznatljivog sustava, dakle sasvim aljkavo.

U svezi s 1) moglo bi se posumnjati da prvi *ako* pisan koso označava premisu, a drugi *ako* pisan obično da označava tvrdnju da je izjava $q \to p$ valjana. Ali to nije tako jer se malo dalje taj drugi *ako* zamijeni s *kada* i piše koso.

Obznani li se pak ta tvrdnja javno, njihovo objašnjenje ne pripada pojmu uvjetne vjerojatnosti nego tvrdnji: Ako je $\vDash q \to p$, onda je $V(p \mid q) = 1$ (ali se dosljedno nigdje ne pojavljuje K-ograničenje $V(q) > 0$). Na samom početku formulacije zadatka pojavljuje se fraza: Kolika je vjerojatnost $V(p)$ „ako znamo da je q", što je pogrešno i nema nikakve veze s našim znanjem o tome.

Osim rečenog, q mora biti $\neq \mathbf{◐}$, a zaključak da je $pq = q$ vrijedi onda i samo onda ako je i $p \neq \mathbf{◐}$, a inače ne vrijedi jer slijedi apsurd.

Već s početka [na str. 197] pretpostavlja se da su sve klasične (tj. istinosne) interpretacije jednako vjerojatne i „nezavisne". Što bi to značilo? A malo dalje, u njihovom 3. aksiomu (našem 2.): Ako su [treba ubaciti p i q] *međusobno kontradiktorni*, onda... . A vezano za 3. aksiom i ograničenje [na str. 199] „Kada su sudovi „neovisni"", „kada se „međusobno isključuju"", kao da su ta dva pojma podjednaka, a nisu, pa čak se o neovisnosti još ništa ne zna.

Ovdje se javlja pojam međusobne kontradiktornosti, a u zadatku 2) pojmovi inkompatibilnosti i „kada $q \to \neg p$". Slobodan sam tvrditi da za takvu aljkavost nisu krivi samo autori.

Vrlo je korisno izračunati, $V(p \mid q(q \to p)) = 1$ uz $V(p \wedge q) > 0$, s dvije premise q i $q \to p$, posebice da se vidi K-ograničenje. A isto tako i $V(p \mid q(q \to \neg p)) = 0$, uz $V(\neg p \wedge q) > 0$.

Korisno je također izračunati vjerojatnost silogizama $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$, $\dfrac{A + B \quad \overline{B}}{\overline{A}}$, $\dfrac{A \to B \quad B}{A}$.

10.3. O vjerojatnosnoj nezavisnosti

Pojam vjerojatnosne nezavisnosti ili, skraćeno, nezavisnosti bitan je dio teorije, bilo da se radi o vjerojatnosnoj logici, bilo o teoriji à la Kolmogorov, i jedino raskrižje prema pravoj teoriji vjerojatnosti ili, bez tog pojma, prema teoriji mjere. A što se čita o nezavisnosti u tom dvoautorskom udžbeniku [na str. 201]? Čita se samo da je izjava A *neovisna o* izjavi B ako vrijedi $w(A \mid B) = w(A)$ i to bez K-ograničenja $w(B) > 0$ prihvaćenog od svih suvremenih bayesovaca i ne samo od njih. Slijedi „dokaz", dakako pogrešan, da vrijedi i obrat, tj. da je tada također izjava B *neovisna o izjavi* A, $w(B \mid A) = w(B)$ ponovno bez K-ograničenja $w(A) > 0$. Njihova „alternativna" definicija međusobne nezavisnosti izjava A i B *pravilom množenja*, $w(AB) = w(A)w(B)$, nije podjednaka ispravnoj definiciji međusobne nezavisnosti s K-ograničenjem $w(A) > 0 \,\&\, w(B) > 0$.

U ovom dvoautorskom udžbeniku ima svega previše, a ovih i nekih drugih bitnih i nužnih dijelova teorije vjerojatnosti nema. Čak je i njihova formulacija Bayesovog poučka pogrešna!

Možda smatraju da se izbacivanje tih bitnih ograničenja može opravdati nekim *dodefiniranjem* ili čak i *uvođenjem nestandardne aritmetike realnih brojeva* ili *objašnjavanjem nestandardnom matematičkom analizom*. U tom bi slučaju bilo metodički korektno izmijeniti definiciju vjerojatnosnih funkcija prema kojoj su njihove vrijednosti iz segmenta *običnih realnih brojeva*.

10.4. Primjedba

Kritički osvrt o prototeoriji nastavlja se u podpoglavlju 11.4 i o uvjetnoj vjerojatnosti u poglavlju 14.

Literatura

1. [Cox 1946.] Cox, R.T., Probability, Frequency and Reasonable Expectation, *American J. of Physics* 14(1), 1-13.
2. [Cox 1961.] Cox, R.T., *The Algebra of Probable Inference*, The John Hopkins Press, Baltimore, 1961.
3. [Galavotti 2001.] Galavotti, M.C., Subjectivism, Objectivism and Objectivity in Bruno de Finetti's Bayesianism, 161-174 in D. Corfield and J. Williamson, eds., *Foundations of Bayesianism*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
4. [Halpern 1999.] Halpern, J.Y., Cox'sTheorem Revisited, *J. of Artificial Intelligence Research* 11(1999.), 429-435.
5. [Jeffries 1931.] Jeffries, H., *Scientific Inference*, Cambridge University Press, Cambridge, 1931.
6. [Jeffries 1939.] Jeffries, H., *Theory of Probability*, Claredon, Oxford, 1939., 2nd ed. 1948., 3rd ed. with modificatons 1961.

7. [Keynes 1921.] Keynes, J.M., *A Treatise on Probability*, McMillan, London, 1948.
8. [Kolmogoroff 1933.] Kolmogoroff, A., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Reprint, Springer, Berlin, 1973.
9. [Loredo 1990.] Loredo, T.J., From Laplace to Supernova SN1987A: Bayesian Inference in Astrophysics, 81-142 in P.F. Fougère, ed., *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Kluwer, Dordrecht, 1990.
10. [McClennen 2001.] McClennen, E.P., Bayesianism and Independence, 291-308 in D. Corfield and J. Williamson, eds., *Founditions of Bayesianism*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
11. [Paris&Vencovská] Paris, J. and Vencovská, A., Common Sence and Stochastic Independence, 203-240 in D. Corfield and J. Williamson, eds., *Founditions of Bayesianism*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
12. [Ramsey 1926.] Ramsey, F.P.,Truth and Probability, 23-52 in H.E. Kyburg and H.E. Smokler, eds., *Studies in Subjective Probability*, R.E. Kreger, Huntington, New York, 1926.
13. [Williamson 2009.] Williamson, J., Philosophies of Probability, 493-533 in A.D. Irvine, ed., *Philosophy of Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 2009.
14. [David 1961.] David, F.N., *Games, Gods and Gambling. The origin and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era*, Charles Griffin & Co., London, 1961.
15. [Todhunter 1949.] Todhunter, I., *A History of the Mathematical Theory of Probability from Time of Pascal to that of Laplace*, Chelsea, New York, 1949. (Preslika izvornika iz 1865.)
16. [Hatzivelkos 2012.] Hatzivelkos, A., Što je teorija uzročnosti?, *Poučak* 50 (2012.), 12-24.
17. [Hatzivelkos 2013.] Hatzivelkos, A., Uvod u identifikabilnost (rukopis).
18. [Lauc2004.] Lauc, D., *Elementi simboličke logike, Element, Zagreb, 2004.*
19. [Lauc & Šikić 2014.] Lauc, D. and Šikić, Z., *Logika – udžbenik u trećem razredu gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.
20. [Šeper 2013.] ovaj članak (prepravljen 2015.).
21. [Šeper 2013.] Šeper, K., Strong and weak contentual independence in Bayesian probabilistic logic (rukopis prepravljen 2015.).
22. [Šikić 2012.] Šikić, Z., Fisherovo testiranje hipoteza i Laplaceovo računanje vjerojatnosti, 554-562 u *Zborniku radova 5. kongresa nastavnika matematike*, Profil, Zagreb, 2012.
23. [Šikić 2013.] Šikić, Z., What is probability and why does it matter, http://sikic.files.wordpress.com/2012/3/whatisprobability.pdf (rukopis objavljen u *European Journal of Analytic Philosophy* (EuJAP), Vol. 10, No. 1 (2014.)).
24. [Šikić 2014.] Šikić, Z., On probable conditionals, Četvrta nacionalna Konferencija „Verovatnosne Logike i njihove primene", Knjiga apstrakata, Beograd, Srbija, 2. oktobar 2014.
25. [Takeuti & Zaring 1973.] Takeuti, G. i Zaring, W. M., *Axiomatic Set Theory*, Springer, New York, 1973.
26. [Vuković 2009.] Vuković, M., *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.
27. Wang, G.-J. et al., 2002.] Guo-Jun Wang, Li Fu, Jian Sha Song, Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic, *Science in China (Series A)*, 2002., 45(9): 1106-1116