Matka 24 (2015./2016.) br. 95

O KVADRATU I KUBU S GRAFA

Željko Brčić, Vinkovci

David je učenik osmog razreda, koji je jednoga dana zamolio svoga starijeg brata Marka za pomoć u rješavanju domaće zadaće:

Dobili smo čudnu zadaću u kojoj stvarno ne znam što napraviti. Poslušaj: Je li kvadrat nekoga broja veći ili manji od tog broja? Kada i zašto? Vrijedi li isto i za njegov kub?

Davidovu molbu čuo je i mlađi brat Ante: *Ako mi objasnite što je to kvadrat, možda bih vam i ja mogao pomoći. Ipak sam ja najbolji matematičar u obitelji.*

Kvadrirati neki broj znači pomnožiti ga samim sobom. Recimo, 5 *na kvadrat je* 5 *puta* 5*, odnosno* 25 – objasnio mu je David.

Pa, što je tu onda teško? Očito je kvadrat uvijek veći od samog broja, osim za broj 1 *kada su jednaki jer je* 1 *puta* 1 *jednako* 1.

Baš si mi ti neki matematičar. Zaboravio si nulu koja je također jednaka svom kvadratu i još beskonačno mnogo drugih brojeva koji nisu prirodni.

Pa, nisam ja kriv što u petom razredu još nismo učili nikakve druge brojeve osim prirodnih. Pričekaj tri godine i tvoju ću zadaću znati s lakoćom riješiti – uzvratio mu je Ante.

Na žalost, nemam toliko vremena – odvrati David. *Imaš li ti Marko kakvu ideju?*

Počeo si dobro razmišljati i otkrio dva broja koja su jednaka svojim kvadratima. Sada trebaš provjeriti ima li još takvih brojeva.

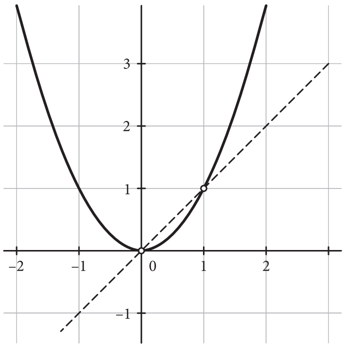
David je razmislio i zaključio: *Neka je x bilo koji broj koji je jednak svome kvadratu. To se može zapisati kao $x^2 = x$, odnosno $x^2 - x = 0$. Dobio sam, dakle, kvadratnu jednadžbu koja ne može imati više od dva rješenja. Iz rastava $x \cdot (x - 1) = 0$ ujedno vidim da je broj jednak svome kvadratu baš za $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.*

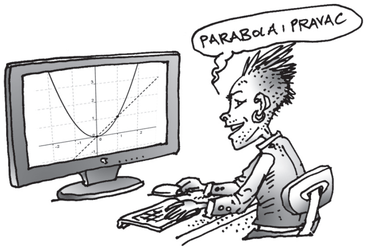
Sljedeće što trebaš napraviti je doznati što se događa s ostalim brojevima – nastavio je s uputama Marko.

Za brojeve veće od 1 *i Ante je shvatio da su oni manji od svojih kvadrata. Ako uzmem neki broj između* 0 *i* 1, *recimo* 0.5, *imat ću $0.5^2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 < 0.5$, što znači da su takvi brojevi veći od svojih kvadrata. S druge strane, negativne brojeve ne moram ni provjeravati jer znamo da je njihov kvadrat uvijek pozitivan, pa je svakako veći od polaznog negativnog broja.*

Marko je nastavio s uputama: *Ta svoja razmišljanja možeš zapisati ovako: Ako je* $x < 0$ *ili* $x > 1$, *onda je* $x^2 > x$; *ako je* $x = 0$ *ili* $x = 1$, *onda je* $x^2 = x$, *a ako je* $0 < x < 1$, *onda je* $x^2 < x$.

Osim toga, zadaća će ti biti još bolja ako sve prikažeš i grafički, u koordinatnom sustavu, koristeći neki računalni program za crtanje grafova funkcija:





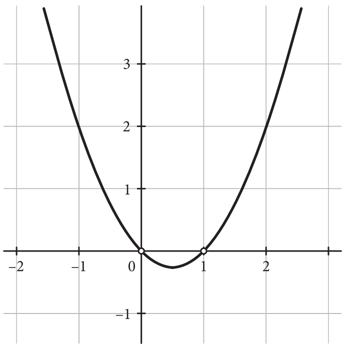
Isprekidana crta (pravac) je graf linearne funkcije $f(x) = x$, *a puna crta predstavlja parabolu koja je graf kvadratne funkcije* $g(x) = x^2$.

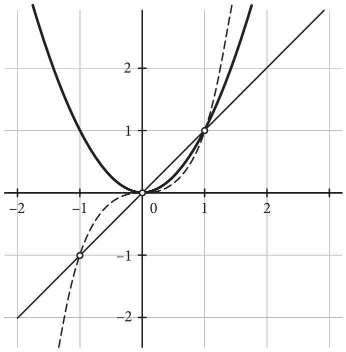
Uočite: grafovi se sijeku u dvije točke s koordinatama (0, 0) i (1, 1), što znači da za $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ funkcije imaju istu vrijednost. Vrijedi $f(x) = g(x)$, odnosno $x = x^2$.

Za sve brojeve između 0 i 1 isprekidana je crta iznad pune, pa je u tom intervalu veća vrijednost funkcije f. Za njih je $f(x) > g(x)$ ili $x > x^2$.

Za sve ostale brojeve (manje od 0 i veće od 1) parabola je viša od pravca, odnosno vrijednost kvadratne funkcije veća je od vrijednosti linearne funkcije. Iz $g(x) > f(x)$ zaključujemo da za takve brojeve x vrijedi $x^2 > x$.

Druga mogućnost grafičkog zaključivanja je da u koordinatnom sustavu nacrtamo samo jedan graf, graf funkcije $f(x) = x^2 - x$.





Za $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ je $f(0) = 0$ i $f(1) = 0$, odnosno $x^2 - x = 0$, što zapravo znači da je $x^2 = x$.

Za $0 < x < 1$ parabola se nalazi ispod osi x, tj. $f(x) = x^2 - x < 0$, odnosno $x^2 < x$.

Za sve druge brojeve, $x < 0$ i $x > 1$, parabola je iznad osi x, odnosno vrijednost funkcije $f(x) = x^2 - x > 0$, odnosno $x^2 > x$.

Sada je sve jasno za kvadrate, ali što ću s kubovima – zapitao je David, no Marko je imao odgovor i na to.

Hajdemo probati sve zaključiti sa slike, bez ikakvog računanja! U istom koordinatnom sustavu nacrtat ću grafove triju funkcija $f(x) = x$ (pravac), $g(x) = x^2$ (parabola) i $h(x) = x^3$ (ona treća krivulja nacrtana isprekidanom linijom). *Reci mi što primjećuješ* – upitao je Marko Davida.

Primjećujem da se sva tri grafa sijeku u točkama (0, 0) i (1, 1), što znači da je za $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ *kub tih brojeva jednak i samom broju i njegovom kvadratu. No, imamo i točku* (–1, –1) *u kojoj se sijeku samo dva grafa* $f(x) = x$ i $h(x) = x^3$. *To znači da je za* $x_3 = -1$ *njihova vrijednost jednaka. Zaista*, $(-1)^3 = -1$.

Dobro – pohvalio ga je Marko. *A sada pogledaj položaj nacrtanih grafova, pa napiši kako se prema veličini odnose broj* (x), *njegov kvadrat* (x^2) *i kub* (x^3) *u pojedinim područjima za broj x.*

Više mi se domaća zadaća ne čini tako teškom. Dakle, ovako:

Ako je $x < -1$, onda je $x^2 > x > x^3$,

ako je $x = -1$, onda je $x^2 > x = x^3$,

ako je $-1 < x < 0$, onda je $x^2 > x^3 > x$,

ako je $x = 0$, onda je $x = x^2 = x^3$,

ako je $0 < x < 1$, onda je $x > x^2 > x^3$,

ako je $x = 1$, onda je opet $x = x^2 = x^3$,

a ako je $x > 1$, onda je $x^3 > x^2 > x$.

Sažeto, za negativne brojeve najveću vrijednost ima kvadrat, za brojeve između 0 i 1najveći je sam broj, dok je za brojeve veće od 1 najveći njihov kub.

Matka 95.indd 148 17.2.2016. 19:57:35