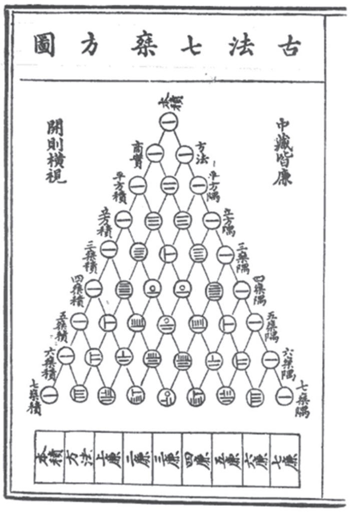
PASCALOV TROKUT

Hannah Villi Bigović, XV. gimnazija, Zagreb



Slika 1. Starokineski Pascalov trokut

Pascalov trokut jedan je od numeričkih trokuta gdje su brojevi raspoređeni u trokutastu formu po nekim zakonitostima. Pascalov trokut otkriven je u staroj Kini (10. – 13. st.), a nazvan je po **Blaiseu Pascalu**, francuskom matematičaru i fizičaru iz 17. stoljeća, koji je bio prvi koji ga je proučio i otkrio njegovu primjenu.

U Kini je Pascalov trokut (sigurno ne pod tim imenom) izgledao kao što prikazuje Slika 1.

Pascalov trokut dobivamo krećući s tri jedinice složene u trokut. Brojeve u sljedećem redu trokuta dobivamo kao zbroj brojeva dijagonalno gore lijevo i dijagonalno gore desno, dok je sve izvan trokuta nula. Vjerojatno sve zvuči puno jednostavnije ako to pokažemo slikom:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Slika 2. Primjer kako nastaje Pascalov trokut

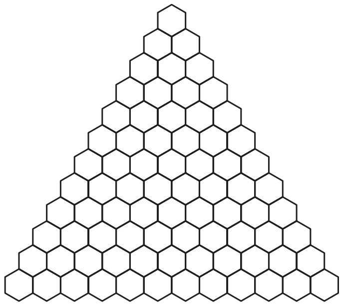
Prva jedinica u ovome trokutu nalazi se u nultom redu, a dvije jedince ispod nje su u prvom redu. Brojevi 1, 2, 1 su u drugom redu, i tako dalje. Kako bismo lakše odredili broj reda, jednostavno možemo pogledati broj koji se nalazi nakon prve (rubne) jedinice u tome redu. Nakon prve jedinice na vrhu se ne nalazi niti jedan broj, ali budući da je sve izvan trokuta nula, možemo zaključiti da je to nulti red. Broj redova u Pascalovom trokutu je beskonačan jer koliko god daleki red izračunamo, pomoću njega možemo dobiti sljedeći, i zatim sljedeći, i tako bez kraja.

Svaki red u sebi sadrži brojeve koje zovemo članovima toga reda. Kao i redove, članove brojimo od nultog, tako da je u drugome redu (1, 2, 1) prva jedinica nulti član, dvojka je prvi član, a jedinica poslije nje je drugi član. Možemo primijetiti da je zadnji član u drugom redu drugi, a broj članova koji se nalaze u drugome redu je tri (nulti, prvi i drugi). Isto to vrijedi i za ostale redove i članove.

Koji je zadnji član u sedmome redu i koliko ih je ukupno u tome redu?

U Pascalovome trokutu (zbog načina na koji nastaje) postoje mnoga zanimljiva svojstva. Pogledajmo neka od njih.

Za početak ponovite kako nastaje Pascalov trokut. Popunite ovaj trokut brojevima (bilo bi dobro imati kalkulator za kasnije redove kad brojevi postanu jako veliki). Od nultog do četvrtog možete prepisati sa slike, a zatim računajte.



Slika 3. Prazan Pascalov trokut za popunjavanje i bojanje

Sada će nam, ako nas malo računanja nije porazilo pa smo ispunili trokut, trebati dvije bojice. Polja koja sadrže parne brojeve treba obojiti jednom, a polja koja sadrže neparne brojeve drugom bojom.

Prepoznajte li oblik koji se pojavio? Dobili ste jedan od najpoznatijih fraktala.

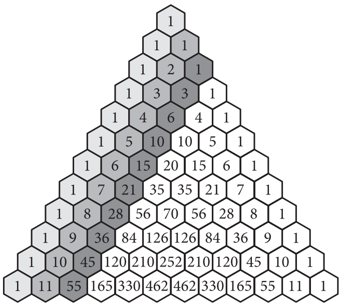
Zatim ćemo malo zbrajati. Zbrojimo sve brojeve u prvom, sve u drugom i sve u trećem redu. Dobit ćemo:

$$1 + 1 = 2$$
$$1 + 2 + 1 = 4$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Rastavite dobivene zbrojeve na proste faktore. Što primjećujete?

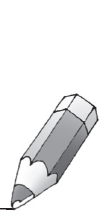
Odredite zbroj u sedmom redu i zapišite ga u obliku umnoška prostih faktora. Kako biste u obliku umnoška prostih faktora zapisali zbroj u desetom, petnaestom, tridesetom redu?

Zatim ćemo promotriti dijagonale, i to takozvane *oštre dijagonale*. To su dijagonale koje sadrže sve iste članove redova, npr. nulta dijagonala sadrži sve nulte članove i sastoji se samo od jedinica.



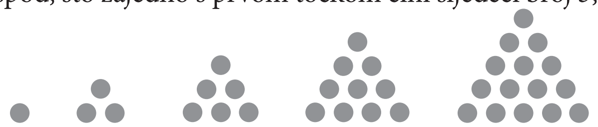
Slika 4. Pascalov trokut s označenim oštrim dijagonalama

Prva dijagonala (ona koja sadrži sve prve članove) je dijagonala koja sadrži redom prirodne brojeve i iz reda u red povećava se za jedan. Ako sad u prvoj dijagonali nađemo proste brojeve, vidjet ćemo da su svi članovi toga reda, osim jedinica na krajevima, djeljivi tim brojem. To možemo vidjeti na primjeru sedmog reda 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 jer su brojevi 7, 21 i 35 djeljivi brojem 7.



Koji su još prosti brojevi u dijelu trokuta na slici? Zaokružite ih i provjerite jesu li ostali članovi njima djeljivi.

Druga dijagonala (ona koja sadrži sve druge članove) sastoji se od trokutastih brojeva. Trokutaste brojeve možemo promatrati kao broj točaka koje čine trokut. Krećemo od jedne točke pa je prvi broj 1, zatim za sljedeći trokut trebamo dodati dvije ispod, što zajedno s prvom točkom čini sljedeći broj 3, i tako dalje.



1 3 6 10 15

Slika 5. Trokutasti brojevi

Možemo vidjeti da se ti brojevi u ovome dijelu poklapaju s brojevima na drugoj dijagonali. Nacrtajte i nađi**te još dva trokutasta broja i provjerite i za njih.**

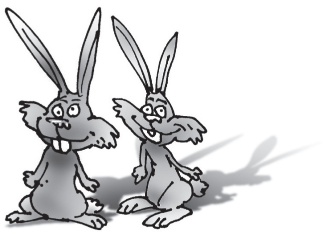
Osim oštrih postoje i *blage dijagonale* koje se na neki način provlače između brojeva i mogu biti nezgodne za označiti, kao što vidimo na slici 6.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Slika 6. Pascalov trokut s označenim blagim dijagonalama

Da si olakšamo posao crtanja tih dijagonala, brojeve u trokutu poravnamo s lijevim rubom.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1



Slika 7. Pascalov trokut poravnat s lijevim rubom i označenim blagim dijagonalama

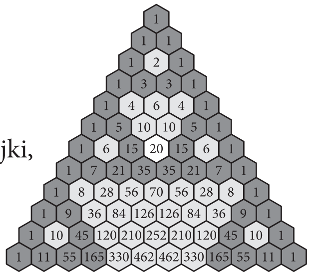
Zbrojimo li brojeve na blagim dijagonalama, dobit ćemo:

$$1 = 1$$
$$1 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$
$$2 + 1 = 3$$

$$1 + 3 + 1 = 5$$
$$3 + 4 + 1 = 8$$
$$1 + 6 + 5 + 1 = 13$$

Brojevi koje dobivamo tim zbrajanjem su brojevi iz Fibonaccijevog niza: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... Brojevi u Fibonaccijevom nizu nižu se po pravilu da je svaki broj jednak zbroju dvaju prethodnih članova niza, a prva dva broja u nizu su 1. Treći broj je 2 (1 + 1), četvrti broj je 3 (1 + 2), peti broj je 5 (2 + 3), i tako dalje.

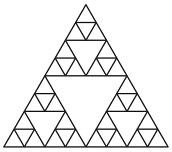
Zbrojite sljedeće četiri blage dijagonale i provjerite uočenu pravilnost.



Slika 8. Ispunjen i obojen Pascalov trokut

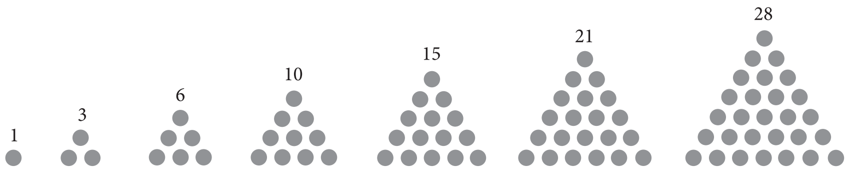
Rješenja

U sedmome redu zadnji član je sedmi, a ukupno ih je osam.
To je Sierpinskijev trokut.
Zbroj u sedmome redu je $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, u desetom je umnožak deset dvojki, u petnaestom je umnožak 15 dvojki, u tridesetom je umnožak 30 dvojki.



Slika 9. Trokut Sierpinskog za usporedbu

Osim 7, prosti brojevi u ovome dijelu trokuta su 2, 3, 5, 11 i ostali članovi djeljivi su tim brojevima.
Trokutasti brojevi prate vrijednosti na dijagonali pa sljedeća dva izgledaju ovako:



Slika 10. Rješenje za trokutaste brojeve

Zbrajanje blagih dijagonala i dobivanje vrijednosti za Fibonaccijev niz idu ovako:

$$4 + 10 + 6 + 1 = 21 = 8 + 13$$
$$1 + 10 + 15 + 7 + 1 = 34 = 13 + 21$$
$$5 + 20 + 21 + 8 + 1 = 55 = 21 + 34$$
$$1 + 15 + 35 + 28 + 9 + 1 = 89 = 34 + 55$$

Literatura:

http://ptri1.tripod.com/ (6. 1. 2016.)
http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/PascalTriangleProperties.shtml (6. 1. 2016.)
http://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html (6. 1. 2016.)
http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pascal.triangle.html (6. 1. 2016.)