

NOGOMETNA LOPTA

Kristina Košćević, Zagreb






Nedavno mi se prijatelj, koji se inače bavi izradom predmeta od kože, požalio kako ne zna skrojiti kožni materijal za nogometnu loptu. Matematički rečeno, nije znao kako napraviti mrežu, odnosno plašt nogometne lopte. Odlučila sam pozabaviti se tom temom ne bih li mu pomogla. Time sam sebe, a i druge, još jednom uvjerila koliko nas matematika svakodnevno okružuje.

Nogometna lopta, popularna *bubamara*, sastavljena od kombiniranih crno-bijelih površina predmet je želja brojnih dječaka. No, mnogi ne znaju da se ona doista može matematički opisati.

Da bismo mogli proučiti i shvatiti izgled mreže nogometne lopte, prvo moramo upoznati *Platonova tijela* odnosno *pravilne poliedre* (tijekom svog obrazovanja s Platonovim tijelima susrest ćete se u 8. razredu osnovne i u 2. razredu srednje škole).

Pravilni poliedri geometrijska su tijela čije su strane pravilni mnogokuti/poligoni, tj. njihovu mrežu čine pravilni mnogokuti/poligoni.¹ Da bismo tijelo mogli nazvati pravilnim poliedrom, mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

- strane mu moraju biti pravilni i međusobno sukladni poligoni,
- kutovi među stranama moraju biti jednakih veličina.

poliedar	likovi na stranama	broj strana	grčki naziv	naziv poliedra
	kvadrati	6	<i>heksa</i>	heksaedar
	jednakostranični trokuti	4	<i>tetra</i>	tetraedar
	jednakostranični trokuti	8	<i>okto</i>	oktaedar
	jednakostranični trokuti	20	<i>ikosi</i>	ikosaedar
	pravilni peterokuti	12	<i>dodeka</i>	dodekaedar

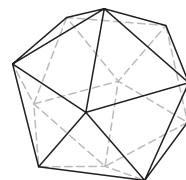
Osim pet Platonovih, postoji i četrnaest *Arhimedovih tijela* koja su omeđena pravilnim mnogokutima koji mogu imati različit broj stranica (dok su strane Platonovih tijela sve sukladni mnogokuti). Arhimedova tijela nazivaju se još i *polupravilni poliedri*. Jedno od njih prepoznamo u *nogometnoj lopti*.

¹Prisjetimo se: pravilni mnogokuti su geometrijski likovi sa stranicama jednakih duljina i kutovima jednakih veličina (dakle, romb ili pak pravokutnik nisu pravilni poligoni).

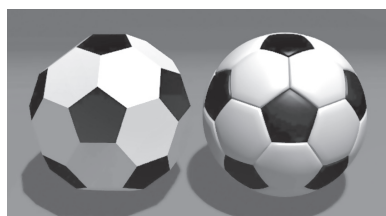
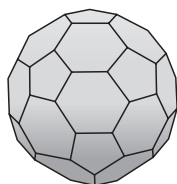


Matematički gledano, kako nastaje nogometna lopta?

Ako od pravilnog ikosaedra „odrežemo” njegove vrhove, dobit ćemo model nogometne lopte. Dakle, klasični dijelovi od kojih se šije vanjština nogometne lopte čine krnji ikosaedar.



Pravilni ikosaedar

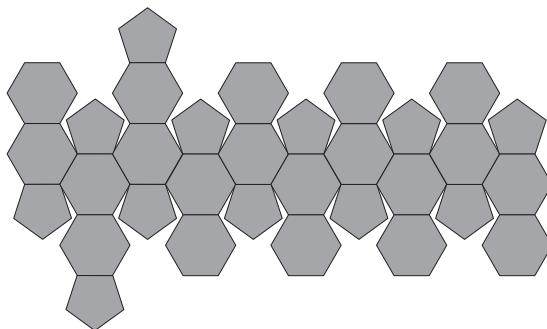


Model nogometne lopte

Kako izgleda mreža nogometne lopte?

Standardna je nogometna lopta, poznata kao *bubamara*, zapravo „okruglasti poliedar” sastavljen od **12 crnih** peterokuta i **20 bijelih** šesterokuta. Takav je dizajn predstavljen 1970. godine kako bi televizijski gledatelji loptu lakše uočavali na terenu.

Svaki peterokut okružen je s pet šesterokuta, dok su šesterokuti okruženi naizmjenično s tri peterokuta i tri šesterokuta. Dakle, u svakome vrhu sastaju se jedan peterokut i dva šesterokuta.



Model nogometne lopte svrstan je u polupravilne poliedre čija je karakteristika da su im strane pravilni poligoni, ali dvije različite vrste (pravilni peterokuti i pravilni šesterokuti).

Pri crtanju mreže „nogometne lopte” znatno će nam pomoći primjena Eulerove formule² koja povezuje broj strana (s), broj vrhova (v) i broj bridova (b) (konveksnog) poliedra. Naime, uz navedene oznake, za sve konveksne (pa onda i pravilne i polupravilne) poliedre vrijedi veza:

$$v - b + s = 2.$$

²Mlađi Matkači će se s Eulerovom formulom pobliže upoznati u 2. razredu srednje škole.

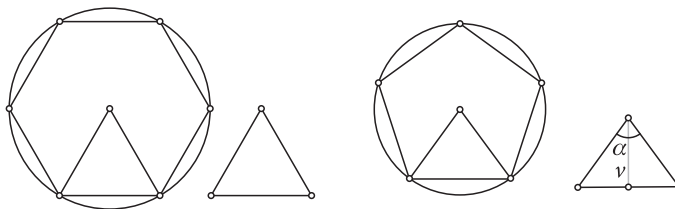


Zadatak 1. Znajući činjenice o *bubamari* (odnosno krnjem ikosaedru), odredite broj vrhova i bridova „lopte“. Uzmite u obzir da je svaki brid zajednički dvjema stranama, dok je svaki vrh zajednički trima stranama.

Rješenje: *Bubamara* je omeđena s 12 peterokuta i 20 šesterokuta, što znači da je $s = 12 + 20 = 32$. Svi peterokuti imaju ukupno $12 \cdot 5 = 60$ bridova, a svi šesterokuti $20 \cdot 6 = 120$ bridova. Svaki brid zajednički je dvjema stranama pa je ukupan broj bridova *bubamare* jednak $b = \frac{60 + 120}{2} = \frac{180}{2} = 90$. Svi peterokuti imaju ukupno $12 \cdot 5 = 60$ vrhova, a svi šesterokuti $20 \cdot 6 = 120$ vrhova. Svaki vrh zajednički je trima stranama i broj vrhova jednak je $v = \frac{60 + 120}{3} = \frac{180}{3} = 60$. Dakle, nogometna lopta ima ukupno 32 strane, 90 bridova i 60 vrhova.

Zadatak 2. Pomozite krojaču izračunati površinu mreže nogometne lopte ako su bridovi peterokuta i šesterokuta duljine 3 cm. Koliko bi mu materijala bilo potrebno za šivanje jedne takve lopte?

Rješenje: Izračunajmo površinu jednog pravilnog šesterokuta i jednog pravilnog peterokuta sa stranicama duljine 3 cm.



Površina pravilnog šesterokuta 6 je puta veća od površine svog karakterističnog trokuta, a karakteristični trokut pravilnog šesterokuta jednakostaničan je trokut, ovdje sa stranicom duljine 3 cm. Površina karakterističnog trokuta jednaka je $p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$, pa je površina pravilnog šesterokuta jednaka $p = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23.38 \text{ cm}^2$.

Površina pravilnog peterokuta 5 je puta veća od površine svog karakterističnog trokuta, a karakteristični trokut pravilnog peterokuta jednakokrakan je trokut, ovdje s osnovicom duljine 3 cm i kutom između krakova veličine $\alpha = 72^\circ$. Površina karakterističnog trokuta jednaka je $p = \frac{3\nu}{2}$, pri čemu duljinu visine ν računamo kao $\nu = \frac{1.5}{\tan 36^\circ}$ i dobivamo da je $\nu \approx 2.07 \text{ cm}$. Dakle, površina karakterističnog trokuta pravilnog peterokuta približno je 3.10 cm^2 , a površina pravilnog peterokuta približno je 15.50 cm^2 .

³Mlađi Matkači naučit će to u 2. razredu srednje škole.



Sada, kada smo izračunali površinu jednog pravilnog peterokuta i jednog pravilnog šesterokuta, lako izračunamo površinu mreže nogometne lopte:

Mreža se sastoji od 12 pravilnih peterokuta i 20 pravilnih šesterokuta. Dakle, površina mreže jednaka je zbroju 12 površina pravilnog peterokuta i 20 površina pravilnog šesterokuta:

$$p_{\text{mreže}} \approx 12 \cdot 15.5 + 20 \cdot 23.38 \approx 186 + 467.6 \approx 653.6 \text{ cm}^2$$

Zadatak 3. Nogometna lopta dizajnirana je kako bi bila vidljiva na velikome terenu. Odredi omjer površina crnih i bijelih polja na popularnoj *bubamari* koristeći podatke iz prethodnog zadatka.

Rješenje: Znamo da se mreža nogometne lopte sastoji od 12 pravilnih peterokuta (crna polja) i 20 pravilnih šesterokuta (bijela polja). U prethodnom zadatku izračunali smo površinu jednog od pravilnih peterokuta i šesterokuta. Površina svih crnih polja približno je 186 cm^2 , a svih bijelih približno je 467.6 cm^2 .

Tada je traženi omjer površina $p(\text{crna polja}) : p(\text{bijela polja}) = 186 : 467.6$, što je približno $2 : 5$.

Zadatak 4. Nogometna lopta u unutrašnjosti ima „balon” koji je obložen kožom izgleda *bubamare*, pri čemu je površina lopte $1\,519.76 \text{ cm}^2$. Izračunaj volumen maksimalno napumpanog balona nogometne lopte.

Rješenje: Ako je unutrašnjost nogometne lopte maksimalno napumpana, onda je kožna mreža pripijena uz balon i nalikuje kugli. Zanimljivo je malo odstupanje između balona i kožne presvlake, tj. odstupanje oblika nogometne lopte od oblika kugle, možemo približno izračunati volumen nogometne lopte tako što ćemo izračunati volumen kugle oplošja $1\,519.76 \text{ cm}^2$.

Oplošje kugle (lopte) računamo prema formuli $O = 4r^2\pi$, pa iz zadanog podatka o oplošju nalazimo da je polumjer lopte približno 11 cm. Volumen lopte, koji računamo prema formuli $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, tada iznosi približno $5\,572.5 \text{ cm}^3$.



Literatura:

1. Glasnović Gracin D., Ćurković Z., Kralj L., Banić S., Stepić M. (2010.): *Petica+ 8*, udžbenik i zbirka zadataka za 8. razred osnovne škole, II. svezak

Internetske stranice:

- <http://gimnazija-cres.hr/wp-content/uploads/2014/02/Pravilni-mnogokuti.pdf>
- <http://mis.element.hr/fajli/352/19-09.pdf>
- https://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=5&ved=0CDsQFjAEahUKEwj39rTm6TIAhXJ6RQKHj4ADw&url=http%3A%2F%2Fwww.mat-hos.unios.hr%2Fkolokvij%2Fsluke%2Fsa_predavanja%2Fbruckler_060601.ppt&usg=AFQjCNFqufowZKpyfypsYW63aYrYsEL8Wrg&sig2=8K09H5vNx1481uABBPjDQ

