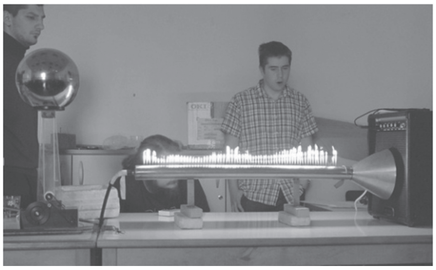
THE MAGIC OF SOUND

Lucija Marš i Vinko Michael Dodig, XV. gimnazija, Zagreb

XV. gimnazija nositelj je Erasmus+ projekta „The Magic of Sound". Riječ je o dvogodišnjem projektu koji financira Europska unija, a u njemu sudjeluju i škole pratneri Denvonport High School for Girls iz Plymoutha u Velikoj Britaniji, Moise Nicoara College iz Arada u Rumunjskoj i Justus-von-Liebig Gymnasium iz Neusa u Njemačkoj. U projektu ćemo zvuk proučavati s matematičkog, fizikalnog, biološkog i glazbenog aspekta.

U jesen 2015. godine bili smo domaćini projektnoga tjedna. Naše goste dočekali smo u Zagrebačkoj zračnoj luci gdje smo započeli našu kratku avanturu. Svi smo se potrudili kako bi se gosti osjećali ugodno i dobrodošlo u Lijepu Našu. Prvi dan odveli smo ih u obilazak Gornjega grada i centra Zagreba, i potrudili se da kušaju nešto tradicionalno.

Sljedeći dan uputili smo se u našu školu. Nakon dobrodošlice zaputili smo se na nastavu kako bismo im pokazali način rada u našoj školi, te smo imali radionicu „Fizika Ekspres" na kojoj smo vidjeli mnogo zanimljivih pokusa vezanih uz zvuk. Predvečer smo se zaputili na Fakultet strojarstva i brodogradnje gdje smo slušali predavanje prof. Šikića o poveznici između matematike i glazbe.



Slika 1. Radionica „Fizika ekspres"

Sljedećih dana, u višednevnoj ekskurziji, obišli smo Memorijalni centar Nikole Tesle u Smiljanu gdje smo se upoznali sa životom i radom Nikole Tesle, posjetili smo najmanju katedralu na svijetu (u Ninu) gdje smo snimili crkvena zvona, te vidjeli morske orgulje i Etnografski muzej u Zadru.

Slika 2. Posjet morskim orguljama

Razgledali smo Šibenik i posjetili NP Krka, Knin i kninsku tvrđavu, a na povratku prema Zagrebu stali smo u Rastokama kako bismo snimili zvuk slapova.

U petak smo posjetili Institut za fiziku gdje smo ponovno vidjeli brojne zanimljive eksperimente. Također, imali smo i prezentaciju o laserskoj harfi, a nakon prezentacije i sami smo na njoj zasvirali. Popodne smo se okupili u školi gdje smo imali predavanje o ICT-u.

Slika 3. Laserska harfa

U subotu smo u školi imali radionicu o bubnjevima i tehnikama sviranja. Potom je uslijedila radionica o akademskoj iskrenosti, a nakon radionice uputili smo se u Paviljon jeke u parku Maksimir. Tijekom toga tjedna svi smo stekli jedno novo iskustvo, naučili ponešto novoga i ostvarili brojna prijateljstva.

U projektu ćemo se baviti vezom između matematike i zvuka. Ponukani predavanjem profesora Šikića, proučavali smo konsonantne i disonantne zvukove.

Disonantno i konsonantno

Kada kažemo da je nešto disonantno, to znači da nije ugodno uhu. Tako su disonantni tonovi oni koji nisu ugodni našem uhu i stvaraju napetost kod slušača. Nasuprot tomu, konsonantni su tonovi oni koji nam zvuče ugodno. Isti ovaj princip vrijedi i za više tonova; ako neki tonovi zajedno zvuče neugodno uhu, kažemo da zvuče disonantno, dok za one koji zajedno zvuče ugodno kažemo da zvuče konsonantno ili da su u harmoniji.

Svi mi možemo odrediti što nama zvuči lijepo, a što ne (što nam je konsonantno, a što disonantno), no problem se javlja kada pokušamo matematički odrediti koji su tonovi zajedno disonantni, a koji konsonantni.

Pitagora i zakon malih brojeva

Pitagora je dao jedno moguće objašnjenje o tome koji tonovi zvuče konsonantno, a koji disonantno. On je rekao da su dva tona konsonantna ako im frekvencije stoje u omjeru malih prirodnih brojeva.

Što znači omjer malih brojeva?

Ovo ćemo najbolje opisati primjerima. 2/1 je omjer manjih brojeva nego 3/2, a to je omjer manjih brojeva nego 3/4, što je omjer manjih brojeva od 634/567.

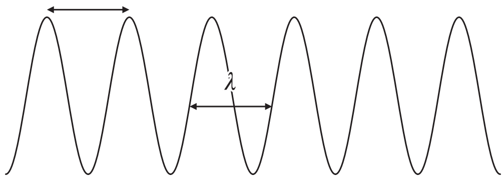
$$\frac{3}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{11}{9}\ \frac{27}{10}\ \frac{27}{16}\ \frac{133}{98}\ \frac{255}{142}\ \frac{1334}{878}\ \frac{2045}{1023}$$

Slika 4. Omjer malih i velikih brojeva

Vidimo da se brojevi u razlomcima povećavaju s lijeva na desno. Tonovi čiji je omjer frekvencija načinjen od manjih brojeva trebali bi ljepše zvučati zajedno, tj. disonancija se povećava s lijeva na desno.

Što je frekvencija?

Frekvencija (f) je općenito broj ponavljanja nekog događanja (n) u jedinici vremena (t). Nas ovdje zanima frekvencija zvuka, a zvuk je val, pa je frekvencija jednaka omjeru brzine širenja vala (v) i valne duljine (λ): $f = \dfrac{v}{\lambda}$ [Hz]



Slika 5. Valovi i valna duljina

Primijenimo zakon malih brojeva na tonove

Uzmimo osnovnu ljestvicu: C D E F G A H c. Za ovaj primjer pretpostavit ćemo da ton C ima frekvenciju 1, a ton c frekvenciju 2. Naime, svaki ton ima svoju specifičnu frekvenciju (izraženu u hertzima – Hz), ali mi uzimamo samo brojeve koji će predstavljati odnos među frekvencijama.

Pogledajmo žicu violine na kojoj sviramo ton osnovni ton C:

Pogledajmo interval oktave od C do c. Oktava je raspon od 8 tonova, a ostvaruje se titranjem žica kojima su duljine u omjeru 2 : 1

Usporedimo duljine žica:

Ton	Duljina žice	Frekvencija
C	1	1
c	1/2	2

Pogledajmo interval kvinte od C do G. Kvinta je raspon od 5 tonova, a interval kvinte ostvaruje se omjerom 3 : 2.

Ton	Duljina žice	Frekvencija
C	1	1
G	2/3	3/2

Zadatak 1. Kvarta je raspon od 4 tona. Pogledajmo interval kvarte od C do F. Interval kvarte ostvaruje se omjerom 4 : 3. Označite to na žici i ispunite tablicu.

Ton	Duljina žice	Frekvencija
C	1	1

Veličina (duljina) intervala koji razapinju bilo koja dva tona jednak je omjeru njihovih frekvencija (frekvencija krajnjeg tona/frekvencija početnog).

Zadatak 2. Popunite tablicu.

krajnji ton/početni ton	veličina intervala koji razapinju
c/G	$\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{4}{3}$
G/C	
c/C	
c/F	
F/C	
G/F	

Koji su od intervala u tablici intervali kvinte, a koji kvarte? Kolike su im duljine? Ako ste dobro riješili zadatak, dobivena veličina intervala od F do G trebala bi biti 9/8. Interval duljine 9/8 naziva se cijeli ton.

Ako je interval D/C cijeli ton i njegova je duljina 9/8, a frekvencija tona C je 1, lako možemo izračunati frekvenciju tona D: zbog $\frac{D}{C} = \frac{9}{8}$ zaključujemo da je frekvencija tona D jednaka $\frac{9}{8}$.

Zadatak 3. Izračunajte frekvenciju tona E ako je interval E/D cijeli ton i ima duljinu 9/8.

Zadatak 4. Izračunajte preostale frekvencije ako su intervali A/G i H/A cijeli tonovi duljine 9/8.

ton	C	D	E	F	G	A	H	c
frekvencija	1	9/8		4/3	3/2			2

Intervali cijelih tonova su D/C, E/D, G/F, A/G i H/A. Što je s intervalima F/E i c/H?

Izračunajmo duljinu intervala F/E. Ta je duljina omjer frekvencija tonova F i E pa iznosi $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{81}{64}} = \frac{256}{243}$. Ovu duljinu intervala zovemo poluton.

Zadatak 5. Izračunajte duljinu intervala c/H. Jeste li dobili poluton?

C	D	E	F	G	A	H	c

cijeli ton cijeli ton poluton cijeli ton cijeli ton cijeli ton poluton

Slika 6. Polutonovi i cijeli tonovi

Ljestvica od C do c sadrži 5 cijelih tonova i 2 polutona.

Pretpostavimo da su tri tona X, Y, Z u nizu takvi da su Y/X i Z/Y polutonovi duljine 256/243. Kolika je duljina intervala Z/X? Očekivali bismo da je to cijeli ton čija je duljina 9/8. Provjerimo! $\frac{Z}{X}=\frac{Z}{Y}\cdot\frac{Y}{X}=\left(\frac{256}{243}\right)\cdot\left(\frac{256}{243}\right)\approx 1.10986$, dok je $\frac{9}{8}=1.125$. Tako dva polutona, nažalost, ne čine cijeli ton.

Sada kad smo izračunali frekvencije tonova možemo izračunati i promatrati omjere njihovih frekvencija te primijeniti zakon malih brojeva.

Zadatak 6. Koristeći tablicu iz 4. zadatka odredite omjere preostalim tonovima. Sami zadajte posljednja dva tona kojima ćete također odrediti omjer. Zatim proučite omjere te prema Pitagorinom zakonu malih brojeva procijenite koja bi dva tona zvučala ugodno (konsonantno), a koja disonantno.

Ton 1	C	C	D	C	D	C	C	H	
Ton 2	c	G	A	F	G	D	E	c	
omjer frekvencija (krajnja/početna)	2 : 1	3 : 2		4 : 3		9 : 8			

Dodatni zadatak: ako svirate neki instrument, provjerite disonantnost ili konsonantnost tonova iz gornjeg zadatka. Odsvirajte dva (ili više) ton(ov)a u isto vrijeme te provjerite podudara li se kononantnost s Pitagorinim zakonom malih brojeva. Možete koristiti i klavirsku tipkovnicu s interneta.

Zanimljivost: Pitagorin zakon malih brojeva nije primjenjiv na instrumente izvan naše moderne kulture ili na zvukove nasumičnih predmeta i prirode. Osim toga, pri ugađanju instrumenata koriste se i drugi načini računanja duljina intervala i frekvencija, no oni daju približno iste vrijednosti kao i razlomci koje smo računali u ovom članku.

Literatura:

1. Zvonimir Šikić, Matematika i muzika, HMD, Zagreb 1999.

Ova publikacija je ostvarena uz financijsku potporu Europske komisije. Ova publikacija odražava isključivo stajalište autora publikacije i Komisija se ne može smatrati odgovornom prilikom uporabe informacija koje se u njoj nalaze.

Erasmus+
Funded by the European Union