

HILBERTOVA KRIVULJA

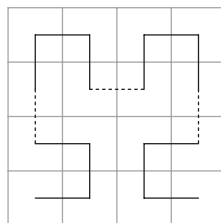
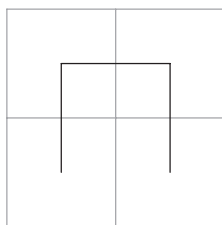
Ivana Katalenac, Zagreb

Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje dijelove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena kopija cjeline. Takvi se likovi nazivaju samosličnima. Pojam fraktala uveo je 1975. god. američki matematičar poljskog podrijetla **Benoit Mandelbrot**, a potječe od latinske riječi *fractus*, što znači slomljen. Osim što su izlomljeni, za fraktale je karakteristično da se isti oblik stalno ponavlja. Ako se neki dio fraktala uveća, izgledat će kao cijeli fraktal. Fraktal često ima sljedeće osobine: finu strukturu na proizvoljno malom uvećanju, previše je nepravilan da bi se mogao opisati tradicionalnim euklidskim jezikom, sam je sebi sličan, ima Hausdorffovu dimenziju koja je veća od njegove topološke dimenzije, te jednostavnu i rekurzivnu definiciju. Fraktalni se objekti pojavljuju u prirodi, a može ih se konstruirati i uz pomoć računala.

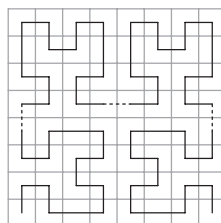
Hilbertovu krivulju prvi je predstavio David Hilbert (1862. – 1943.), a spada u skupinu space-filling krivulja koje ispunjavaju neku površinu nakon određenog broja iteracija. Hilbertova krivulja ispunjava površinu kvadrata.

Konstrukcija Hilbertove krivulje:

- Počinjemo s osnovnim oblikom prikazanim na slici lijevo.
- U sljedećoj iteraciji duljina krivulje u rešetki je upola manja dok se broj rešetki, tj. krivulja povećava četiri puta, s tim da su donje dvije istog smjera kao i početna, a gornje su dvije rotirane za 90° ulijevo odnosno udesno. Na kraju se rubne točke susjednih krivulja spoje dužinom kao na slici.



- Iteriranje se nastavlja ponavljanjem opisanog postupka.



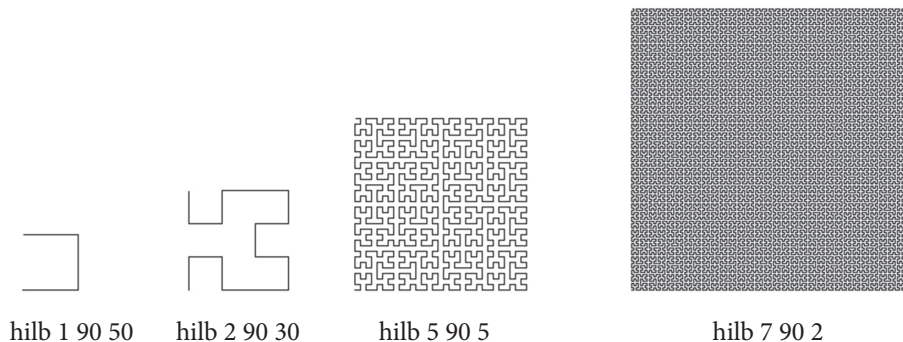
Nakon određenog ponavljanja (oko 7 do 9) krivulja će se prekriti cijeli kvadrat. Za razliku od Sierpinskijevog trokuta i Kochove krivulje, u procesu izgradnje Hilbertove krivulje oblik se smanjuje i transformira. Algoritam kojim nastaje Hilbertova krivulja naziva se Lindenmayer sistem (L-sustav).

Kod u MSW Logo-u koji crta Hilbertovu krivulju je:

```
TO Hilbert :n :a :h
  IF :n = 0 [ STOP ]
  RT :a
  Hilbert :n - 1 (-:a) :h
  FD :h LT :a
  Hilb :n - 1 :a :h
  FD :h
  Hilbert :n - 1 :a :h
  LT :a FD :h
  Hilbert :n - 1 (-:a) :h
  RT :a
```

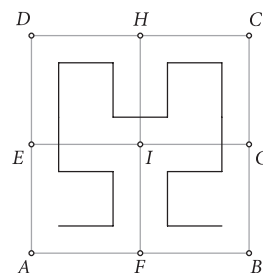
END

Varijabla n označava broj iteracija, varijabla a se u programu koristi zbog rotiranja za 90° u lijevo i desno, a varijabla h označava duljinu pomaka.



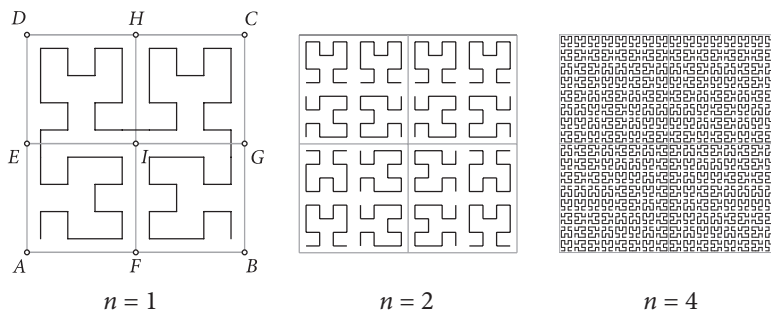
U knjižici *101 ideja za projekt za The Geometer's Sketchpad* nalazi se i projekt vezan za Hilbertovu krivulju. Štoviše, radi se i o super-izazovu jer nitko ne zna točno je li u *Sketchpadu* zaista moguće konstruirati Hilbertovu krivulju koristeći iteriranje. Ono što je sigurno moguće napraviti u *Sketchpadu* je varijacija Hilbertove krivulje.

1. korak: Crtanje započnemo oblikom sa slike desno.



2. korak: Naredbom *Novi parametar* iz izbornika *Broj* kreiramo parametar n s početnom vrijednošću 1.
3. Točke A i B (neovisne točke od kojih smo započeli konstrukciju kvadrata $ABCD$) iteriramo do dubine n u 4 slike prema pravilu pridruživanja $\{E, I\}$, $\{I, G\}$, $\{E, A\}$ i $\{B, G\}$. (Označimo točke A i B te parametar n i, držeći pritisnutu tipku *Shift*, u izborniku *Transformacije* odaberemo naredbu *Ponavljanje/Iteriranje do dubine*. Za ljepši prikaz odaberemo prikaz samo posljednje iteracije te prikaz samo slika bez točaka.)
4. korak: Sakrijemo lik od kojega smo započeli crtanje.

Mijenjanjem vrijednosti parametra n mijenjamo broj iteracija.



Space-filling fraktali

Vrstu fraktala koji s povećanjem broja iteracija popunjavaju prostor zovemo Space-filling fraktali. Hilbertova krivulja je primjer Space-filling fraktala. Još neki zanimljivi Space-filling fraktali su Peanova krivulja, Peano – Gosper krivulja, Levyev fraktal (C krivulja), Levyev sag, Zmaj krivulja, a o nekima od njih pročitajte u sljedećem broju *Matke*.

Nagradni zadatak:

Koristeći neki program dinamične geometrije ili neki programski jezik osim MSW ili FMS Loga-a nacrtajte Hilbertovu krivulju ili Hilbertovu S-krivulju. Svaki *Matkač* koji na matka@math.hr pošalje rad do 1. rujna 2016. bit će nagrađen. Prilikom slanja radova navedite koji ste program/programski jezik koristili.

Literatura:

1. C. Ting, H. Liming: *World of Fractal*
2. *101 ideja za projekt za The Geometer's Sketchpad*, Proven, Zagreb, 2006.
3. https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Uvod%20U%20Fraktale%20by%20Mladen%20Pausic.pdf (15. 2. 2016.)
4. http://dennisatwood.com/m_fractals.php (15. 2. 2016.)

