Osječki matematički list 16 (2016), 135-147

Poissonovi točkovni procesi

Andrijana Brkić[*] Bojan Basrak[†]

Sažetak

U raznim znanstvenim disciplinama od velike je važnosti odrediti precizan matematički model za slučajno razbacane točke u prostoru (ili vremenu). Upravo takav model nam daju tzv. Poissonovi točkovni procesi. Iako je matematički alat za njihovu analizu ponekad vrlo napredan, već i relativno jednostavnim vjerojatnosnim metodama možemo izvesti vrlo korisne zaključke o ponašanju nasumično razbacanih točaka i njihovom grupiranju. Članak kroz primjere ilustrira primjenu ovakvih metoda na praktične probleme u različitim kontekstima.

Ključne riječi: *Poissonova razdioba, slučajno razbacane točke, binomna razdioba, Poissonov točkovni proces.*

Poisson Point Processes

Abstract

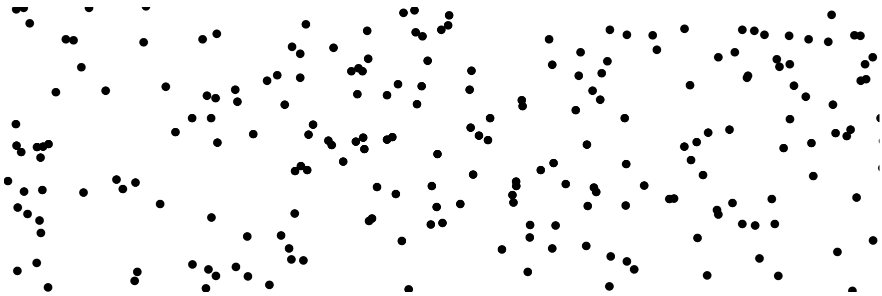
In various scientific fields it is important to find precise mathematical model for points randomly scattered in space (or time). Poisson point processes represent exactly this kind of model. Mathematical tools for their analysis are typically very advanced, but already relatively simple probabilistic methods yield relevant conclusions about the behaviour of randomly scattered points and their clustering in particular. The article illustrates this type of methods on practical problems in various settings.

Keywords: *Poisson distribution, randomly scattered points, binomial distribution, Poisson point process.*

[*]Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: abrkic0@gmail.com

[†]Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: bbasrak@math.hr

1 Uvod



Slika 1:

Što mogu predstavljati točke na slici 1 ? Možda pozicije drveća u šumi ili zvijezda u svemiru? Točke se čine slučajno razbacane u dvodimenzionalnom prostoru bez ikakvog vidljivog pravila. Sličnu sliku možemo zamisliti i u jednoj ili više dimenzija, ali i u nekom kompleksnijem prostoru, npr. na sferi koja može predstavljati površinu Zemlje. Razne pojave u prirodi se mogu opisati slučajnim pozicijama točaka u prostoru, stoga je njihovo precizno modeliranje već dugi niz godina izazov matematičarima. Uvođenje takvih modela omogućilo je dobivanje raznih korisnih informacija o takvim pojavama. Suvremenim matematičkim jezikom te modele nazivamo točkovnim procesima. Prvo korištenje točkovnih procesa najčešće se pripisuje Johnu Michellu koji je još 1767. godine htio izračunati vjerojatnost da neka zvijezda bude u određenoj okolini druge zvijezde, pod pretpostavkom da su zvijezde *potpuno nasumično* raspoređene. Takve pojave, gdje su točke potpuno nasumično razbacane, tj. gdje nema nikakve interakcije među točkama, opisuju upravo Poissonovi točkovni procesi te time predstavljaju osnovni model među točkovnim procesima.

Razvoj teorije Poissonovih točkovnih procesa započeo je početkom 20. stoljeća u tri različita konteksta. Danski matematičar A. K. Erlang koristio ih je u proučavanju broja dolaznih poziva, fizičari E. Rutherford, H. Geiger i matematičar H. Bateman došli su do Poissonovih procesa kroz eksperiment sa alfa-česticama, dok ih je N. Campbell koristio u modeliranju šuma s efektom hica (engl. shot noise). Ipak, Poissonovi procesi nisu dobili ime niti po jednoj od navedenih osoba, nego po tzv. *Poissonovoj razdiobi* koja se pokazala ključnom u opisivanju razdiobe potpuno slučajno razbacanih točaka.

2 Poissonova razdioba

Zamislimo da brojimo pojavljivanja nekih neizvjesnih događaja kroz vrijeme. Pri tome pretpostavljamo da je broj događaja u bilo kojem intervalu nenegativan cijeli broj, ali i da su pojavljivanja u međusobno disjunktnim intervalima nezavisna. Takva pretpostavka se može ponekad i eksperimentalno opravdati, pa se koristi u fizici u modeliranju sudara elementarnih čestica ili udara asteroida na određeni dio Zemljine površine.

Pretpostavimo da događaje promatramo kroz velik broj vrlo kratkih intervala, označimo taj (veliki) broj sa n. Pretpostavimo nadalje da je vjerojatnost pojavljivanja jednog takvog događaja jednaka i vrlo mala u svakom pojedinom intervalu. Tu vjerojatnost možemo zapisati u obliku λ/n za neki $\lambda > 0$. Neka je vjerojatnost dva ili više događaja u bilo kojem od kratkih intervala zanemariva. Ukupni broj događaja tada ima tzv. binomnu razdiobu. Naime, vjerojatnost da će događaja biti točno k moguće je izračunati[1] kao

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \quad (1)$$

Za ilustraciju neka su vremenski intervali dugi jednu sekundu, a neka promatranja traje 1 sat, dakle $n = 3600$. Za $k = 0$, dobijemo vjerojatnost da nećemo vidjeti niti jedan događaj u promatranom periodu, dakle $(1 - \lambda/3600)^{3600}$. S druge strane, ukupno možemo očekivati $3600 \cdot \lambda/3600 = \lambda$ događaja za vrijeme promatranja.

Fiksirajmo za trenutak k i λ, a broj intervala n pustimo u $+\infty$ te pogledajmo što se događa sa izrazom u (1). Puštanjem n u beskonačnost, vrijeme našeg promatranja postaje sve veće, dok paralelno vjerojatnost λ/n da se u intervalu pojavi događaj postaje sve manja i manja. Stoga, koliko god velik n bio, očekivani ukupni broj događaja ostaje $n \cdot \lambda/n = \lambda$. Koristeći neke jednostavne činjenice[2] o limesima nizova, lako je provjeriti da prvi od razlomaka na desnoj strani u (1) teži k 1, drugi se ne mijenja sa n, a treći teži k

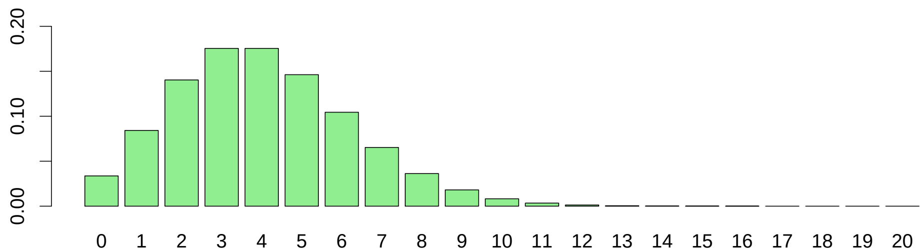
[1] Formulu možemo opravdati poznavajući pravila prebrojavanja i činjenicu da se vjerojatnost istovremenog pojavljivanja više nezavisnih događaja dobiva njihovim množenjem. Naime na $\binom{n}{k}$ različitih načina može se izabrati k intervala između njih n u kojima se događaj dogodio. Taj broj onda još množimo s vjerojatnošću da se u tih k izabranih intervala događaj dogodio, tj. $(\lambda/n)^k$, te da se u preostalih $n-k$ intervala događaj nije dogodio, tj. $(1-\lambda/n)^{n-k}$.

[2] Dovoljno je znati da za bilo koji realan broj c vrijedi $(1+c/n)^n \to e^c$ te $c/n \to 0$ za $n \to \infty$, kao i da za $a_n \to a$ i $b_n \to b$, vrijedi $a_n + b_n \to a + b$ i $a_n b_n \to ab$. Provjerite! Za formalni dokaz pogledajte npr. poglavlje 3 (teorem 2 i primjer 20) u [4].

$e^{-\lambda}$. Tako da je krajnji limes jednostavno

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{za } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Upravo ovi izrazi definiraju tzv. Poissonovu razdiobu (distribuciju), jednu od najvažnijih razdioba u matematici. Njen parametar λ je upravo jednak njenoj očekivanoj vrijednosti. Slika dolje ilustrira Poissonovu razdiobu s parametrom (očekivanjem) $\lambda = 5$, tj. visine stupića upravo odgovaraju vjerojatnostima $p_0, p_1, \dots$, izračunatima za $\lambda = 5$.



Slika 2: Poissonova razdioba s parametrom $\lambda = 5$.

Siméon Denis Poisson (1781.–1840.) francuski matematičar

Poissonovu razdiobu prvi je predstavio francuski matematičar Siméon Denis Poisson u radu u kojem se bavio brojem nepravednih osuda u sudskim postupcima.

Primjer 1. Jedna od najranijih i fascinantnijih primjena Poissonove razdiobe vezana je uz ime Ladislava Bortkiewicza, ruskog statističara poljskih korijena. On je proučavao broj vojnika pruske armije koji bi godišnje pogibao od udarca konja. Podaci su dolazili iz 10 različitih korpusa u periodu od 20 godina, što je dalo 200 perioda za opažanje. Kako su zabilježene ukupno 122 nezgode, prosječan broj smrtnih slučajeva izazvanih udarcem konja iznosio je $122/200 = 0.61$ po periodu i korpusu. Dakle, takve su nezgode bile vrlo rijetke, uglavnom ih je bilo 0 ili 1 u promatranim periodima. No broj poginulih vojnika u nekim korpusima dosezao je do čak 3 odnosno 4 u određenim godinama. Takav neobično veliki broj pogibija u jednoj godini se može smatrati donekle iznenađujućim grupiranjem, pa je prirodno postaviti pitanje može li se takvo grupiranje objasniti slučajem.
Bortkiewicz je uočio je da je u ovom slučaju razumno primijeniti Poissonovu razdiobu, a za njen parametar postaviti $\lambda = 0.61$. Kad je postavio ovakav vjerojatnosni model, mogao je izračunati očekivani broj opažanja u

svakoj kategoriji $k = 0, 1, 2, \ldots$ tako što je pomnožio p_k sa 200. Tako je dobio sljedeću tablicu koja pokazuje iznimno dobru prilagodbu Poissonove razdiobe stvarnim opažanjima.

Tablica 1:

broj poginulih k	0	1	2	3	4	5 ili više
frekvencija opažanja	109	65	22	3	1	0
očekivani broj opažanja	108.67	66.29	20.22	4.11	0.63	0.08

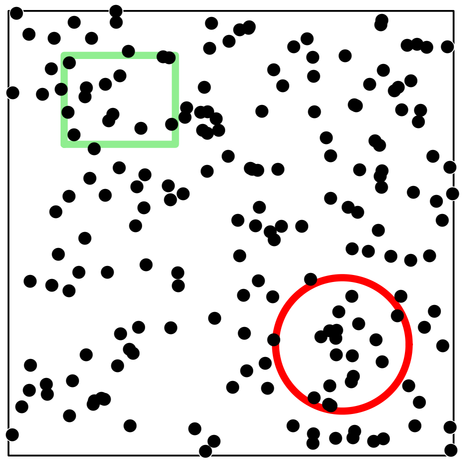
Iz tablice 1 je uočljivo da grupiranje većeg broja nezgoda u nekim godinama nije baš iznenađujuće.

3 Poissonovi procesi

Kao što smo rekli, točkovnim procesima opisujemo raspored slučajnih točaka u nekom vremenskom intervalu ili određenom prostoru (označimo taj prostor sa E). Poissonovi točkovni procesi posebni su po tome što imaju sljedeća dva svojstva:

- broj točaka u svakom podskupu od E ima Poissonovu razdiobu,
- brojevi točaka u disjunktnim podskupovima su međusobno nezavisni.

Pogledajmo dvodimenzionalni točkovni proces na slici 3. Prvo svojstvo nam kaže da broj točaka u crvenom skupu, kao i broj točaka u zelenom skupu, imaju Poissonovu razdiobu, no ne nužno s istim parametrom. Znamo da parametar Poissonove razdiobe predstavlja prosječan (očekivani) broj točaka, pa će skupovi s većim parametrom vjerojatno sadržavati i veći broj točaka. Drugo svojstvo nam kaže da su brojevi točaka u crvenom i zelenom skupu nezavisni. Dakle, ako imamo informaciju o broju točaka u crvenom skupu, to nam ne daje nikakvu informaciju o broju točaka u zelenom skupu i obratno. To svojstvo se često naziva svojstvom potpune slučajnosti i ono je posljedica toga da među točkama procesa nema interakcije.



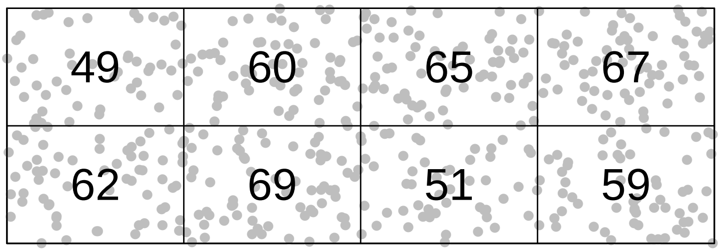
Slika 3:

Za podskup $A \subseteq E$ označimo sa $\mu(A)$ parametar Poissonove razdiobe pridružene skupu A. Stoga je μ zapravo preslikavanje (funkcija) koja podskupu od E pridružuje pozitivan realan broj. Za μ kažemo da je **srednja mjera** Poissonovog točkovnog procesa. Primijetimo sada kako je Poissonov točkovni proces kompleksniji objekt od Poissonove razdiobe – dok je Poissonova razdioba određena samo jednim brojem (svojim parametrom λ), Poissonov proces određen je parametrima $\mu(A)$ Poissonovih razdioba svih mogućih podskupova $A \subseteq E$.

Primjer srednje mjere (za dvodimenzionalne procese) može biti duljina vremenskog intervala ili površina skupa, tada pišemo

$$\mu(A) = |A|.$$

Analogno, u tri ili više dimenzija, srednja mjera može biti proporcionalna volumenu odabranog skupa. Za Poissonov proces s takvom mjerom reći ćemo da je homogen. Primijetimo da je taj naziv u skladu s našom intuicijom. Naime, uzmemo li skupove A_1 površine 10 i A_2 površine 20, tada će očekivani broj točaka u skupu A_2 biti dvostruko veći od očekivanog broja točaka u skupu A_1. Također, u skupovima jednake veličine očekujemo otprilike jednak broj točaka. To možemo vidjeti i na slici 4, gdje smo podijelili prostor u osam jednakih pravokutnika i izbrojili točke. No imajmo na umu da općenito možemo promatrati skupove bilo kakvih oblika, a ne samo pravokutnike.



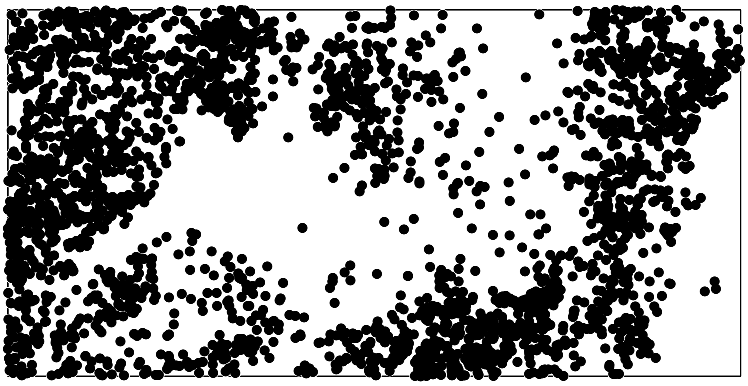
Slika 4:

Dakle, točke su približno jednoliko (kažemo i homogeno ili uniformno) raspoređene po prostoru. Istu situaciju imamo i kada je μ oblika

$$\mu(A) = c|A|,$$

za neki $c > 0$.

No moraju li točke Poissonovog procesa nužno biti jednoliko gusto raspoređene u prostoru? Kada govorimo o *potpuno slučajno razbacanim* točkama, vjerojatno svi zamišljamo sliku nekog homogenog Poissonovog procesa. No činjenica da među točkama nema nikakve interakcije, ne osigurava da će gustoća točaka posvuda biti jednolika jer na gustoću mogu utjecati i neki vanjski faktori. Primjerice, na slici 5 možemo vidjeti pozicije stabala u tropskoj šumi. Sasvim je jasno da gustoća rasporeda stabala nije jednolika, ali po prirodi ovog primjera možemo pretpostaviti da te razlike nastaju jer su neki dijelovi terena pogodniji ili manje pogodni za rast te vrste drveća. Dakle, varijacije u gustoći u ovom slučaju nisu posljedica interakcije među točkama nego kvalitete terena, stoga bismo mogli reći da je drugo svojstvo Poissonovog procesa ovdje opravdano. S druge strane, ako bismo promatrali pojavljivanje neke zarazne bolesti u vremenu i prostoru, jasno je da bi u takvom slučaju razlike u gustoći bile izazvane upravo interakcijom, pa u tom slučaju ne bi bilo opravdano koristiti model Poissonovog točkovnog procesa. Stoga, sam pogled na realizaciju točkovnog procesa može nam dati ideju o tome je li proces homogen ili ne, ali da bismo opravdali korištenje upravo Poissonovog modela, moramo biti upoznati i sa prirodom samog problema koji analiziramo.



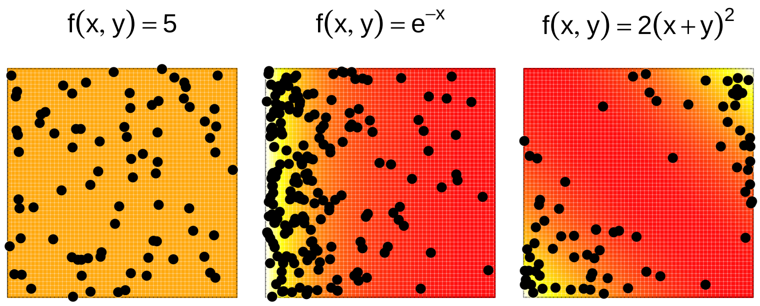
Slika 5: Pozicije stabala u tropskoj šumi [3].

Do sada smo naveli kako izgleda srednja mjera u slučaju homogenog Poissonovog procesa. Ukoliko proces nije homogen, srednja mjera poprima ipak malo tehnički kompliciraniji oblik. Ona se najčešće izražava preko tzv. intenziteta. Intenzitet je nenegativna funkcija $f : E \to [0, \infty\rangle$ koja je formalno povezana sa srednjom mjerom relacijom

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx.$$

Iako vidimo da su nam tu potrebni neki zahtjevniji matematički alati poput integrala funkcija više varijabli, intenzitet je lako razumjeti na intuitivnoj razini. Uzet ćemo za primjer dvodimenzionalni prostor (npr. jedinični kvadrat) i pogledati kako bi izgledali Poissonovi točkovni procesi sa različitim funkcijama intenziteta. Promotrimo sliku 6. Boje predstavljaju ponašanje dane funkcije – na svjetlijim područjima funkcija poprima veće, a na tamnijima manje vrijednosti. Sa slike se jasno vidi da na područjima većeg intenziteta imamo i veći broj točaka, odnosno skupovi na područjima visokog intenziteta imaju veću srednju mjeru. Također, prva slika prikazuje proces s konstantnim intenzitetom 5, a to je upravo homogen Poissonov točkovni proces sa srednjom mjerom oblika $\mu(A) = 5|A|$.

Do sada smo stekli neki osnovni dojam o svojstvima Poissonovih procesa. Pretpostavimo sada da imamo neku pojavu koja se ponaša kao Poissonov točkovni proces i da nam je razdioba tog procesa u potpunosti poznata, odnosno da znamo parametre Poissonove razdiobe za sve moguće podskupove. Koje korisne zaključke možemo iz toga izvući?



Slika 6:

Primjer 2. Promatramo udare asteroida promjera većeg od 4 metra na nekom dijelu Zemljine kore kroz vrijeme. Pretpostavimo da udari međusobno ne utječu jedni na druge, tako da bismo tu pojavu mogli opisati kao Poissonov točkovni proces. Prvo moramo odrediti prostor E u kojem udare možemo promatrati kao točke. Rekli smo da E može biti bilo koje dimenzije, da najčešće u slučaju jedne dimenzije predstavlja vrijeme, a u dvodimenzionalnom slučaju prostor, odnosno koordinate nekog područja. No mi želimo promatrati udare i kroz vrijeme i kroz prostor jer nam je važno kada i gdje se oni događaju. Pretpostavimo da smo se prostorno ograničili na neki komad Zemlje pravokutnog oblika, dimenzija 3 tisuće km $\times$ 3 tisuće km. Tada možemo reći da je naš prostor

$$E = [0,3] \times [0,3] \times \mathbb{R},$$

gdje prva i druga komponenta predstavljaju koordinate u tisućama kilometara, a treća komponenta u Kartezijevom produktu predstavlja vrijeme (u godinama). Dakle, naš prostor E je trodimenzionalan prostor. Svaki udar reprezentiran je točkom u skupu E, npr. udar asteroida koji se dogodio na koordinatama $x = 1500$, $y = 1500$ i to 1954. godine, bit će reprezentiran kao točka $(1.5, 1.5, 1954)$.

Recimo da su, proučavanjem geoloških podataka o udarima na tom području, stručnjaci zaključili da se oni mogu opisati kao Poissonov točkovni proces s konstantnim intenzitetom 0.02. Drugim riječima, srednja mjera tog procesa je oblika

$$\mu(A) = 0.02|A|,$$

gdje smo sa $|A|$ označili volumen skupa A jer je u ovom slučaju naš prostor trodimenzionalan. To znači da na području površine od 1 milijun km^2 kroz vrijeme od 100 godina očekujemo u prosjeku 2 udara.

Pretpostavite da nas zanima kolika je vjerojatnost da se u idućih 50 godina ne dogodi udar asteroida na udaljenosti manjoj od 500 kilometara od mjesta s koordinatama $x = 1$, $y = 1$? Odredimo prvo volumen skupa A kojeg promatramo. Primijetimo da je taj skup valjak u trodimenzionalnom prostoru – njegova baza je krug radijusa 0.5, a visina 50. Stoga je

$$|A| = 0.5^2\pi \cdot 50 \approx 39.27,$$

pa je

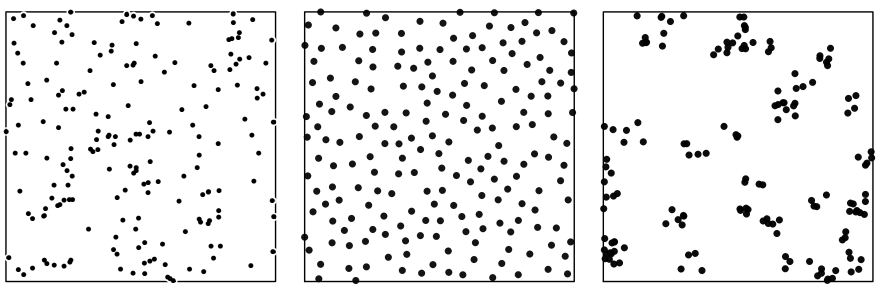
$$\mu(A) = 0.02 \cdot |A| \approx 0.7854.$$

Kako je naš proces Poissonov, znamo da broj točaka u skupu A ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = 0.7854$. Vjerojatnost da takav slučajan broj poprimi vrijednost $k = 0$ je

$$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-0.7854} = 0.456.$$

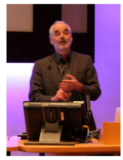
Dakle, tražena vjerojatnost je približno $45,6\%$.

Iako smo se u ovim razmatranjima često oslanjali na intuiciju, ona nas nerijetko može prevariti i dati nam krivu percepciju o vjerojatnosti raznih događaja. Vjerojatnosni izračuni omogućuju nam da izbjegnemo takve zablude i damo objektivnu ocjenu o tome koliko su neki događaji zapravo vjerojatni, baš kao što smo već vidjeli u primjeru iz rada L. Bortkiewicza. Prije nego to ilustriramo još jednim primjerom, razmislite na kojem od tri grafa na slici 7 su točke uniformno razbacane tako da među njima nema interakcije (odgovor se nalazi odmah nakon primjera).



Slika 7: Tri simulirana točkovna procesa.

Primjer 3. Ne tako davno, u srpnju 2014. godine, u razmaku od samo osam dana dogodile su se čak tri avionske nesreće – Malaysian Airlines (17.7., Ukrajina), TransAsia Airways (23.7., Taiwan) te Air Algerie (24.7., Mali). Tri tragične nesreće u tako kratkom roku zaista djeluju nevjerojatno i sigurno su se mnogi tada pitali postaje li putovanje avionom opasnije te koliko je zaista vjerojatno takvo grupiranje nesreća u relativno kratkom vremenskom periodu. Neposredno nakon tog perioda, pitanja ovakvog tipa su se dakako pojavljivala u raznim medijima, a diskusija u ovom primjeru je motivirana doprinosom britanskog statističara Davida Spiegelhaltera [2].



David Spiegelhalter (1953.–) britanski statističar

Kako bismo provjerili vara li nas naša intuicija u ovom slučaju, mogli bismo analizirati kako se ponašao broj avionskih nesreća kroz povijest. Kako se kvaliteta zračnog prometa sigurno prilično promijenila od njegovog početka do danas, za analizu nećemo ići daleko u povijest nego ćemo promotriti samo prijašnjih 10 godina. Promatrat ćemo, dakle, komercijalne letove (s minimalno 18 putnika) u razdoblju od 2004.–2014. godine. Pokazuje se da je tokom tih 10 godina bilo 91 nesreća, što znači da je stopa nesreća $91/3650 \approx 0.025$ po danu (pri tome zanemarujemo činjenicu da su neke godine prijestupne jer to ne mijenja bitno rezultat). Stoga, u intervalu od 8 dana očekujemo u prosjeku $8 \cdot 0.025 = 0.2$ nesreće. Zaista, ako ih u prosjeku očekujemo 0.2, malo je vjerojatno da ih bude tri ili više. No koliko točno vjerojatno?

Primijetimo da prebrojavamo suštinski nezavisne događaje u ograničenim vremenskim intervalima. Kako smo obrazložili, razuman model za takve pojave upravo je Poissonov proces, pa na avionske nesreće kroz vrijeme možemo gledati kao na homogen Poissonov točkovni proces u jednoj vremenskoj dimenziji. Posebno, broj avionskih nesreća u nekom (bilo kojem) intervalu od 8 dana ima Poissonovu razdiobu. Parametar λ te Poissonove razdiobe moramo sami procijeniti. Kako znamo da je interpretacija od λ očekivani (prosječni) broj točaka u tom skupu, najbolja procjena koju možemo dati je $\lambda = 0.2$. Sada možemo odrediti vjerojatnost p da broj nesreća u nekom fiksnom intervalu od 8 dana bude veći ili jednak 3 kao

$$\begin{aligned} p &= 1 - p_0 - p_1 - p_2 \\ &= 1 - e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right) \\ &\approx 0.001. \end{aligned}$$

Vidimo da je vjerojatnost zaista vrlo mala.
No probajmo postaviti pitanje malo drugačije. Kolika je vjerojatnost da se u periodu od 10 godina barem jednom dogodi da unutar nekih 8 dana imamo tri nesreće? Označimo tu vjerojatnost sa p'. Pogledajmo prvo samo disjun-

ktne intervale od 8 dana. Unutar 10 godina, takvih ima $3650/8 \approx 456$. Za svaki od njih, vjerojatnost da je u njemu bilo (strogo) manje od 3 nesreće je prema prethodnom računu $1 - p \approx 0.999$. Kako su ti intervali disjunktni, onda su događaji vezani uz njih nezavisni, pa je vjerojatnost p'' da je bar neki od tih intervala imao barem tri nesreće

$$\begin{aligned} p'' &= 1 - \text{vjerojatnost da je u svakom intervalu manje od 3 nesreće} \\ &= 1 - 0.999^{456} \\ &\approx 0.366. \end{aligned}$$

Dakle vjerojatnost je čak 0.366, a pri tome smo gledali samo disjunktne intervale. Da bi izračunali p' treba uključiti sve moguće intervale pa je račun složeniji, ali jasno je da će vjerojatnost p' biti još veća od p''. Stoga vidimo da u ovom kontekstu, tri nesreće u 8 dana više nisu tako nevjerojatne.

Ovaj posljednji baš kao i prvi od naših primjera ilustrira kako i potpuno slučajno razbacane točke, odnosno događaji, dolaze u grupama (ili klasterima) puno češće nego što to ljudi tipično očekuju. Tako će ponekog iznenaditi da su zapravo samo na lijevom grafu na slici 7 točke uniformno i nezavisno razbacane bez ikakve interakcije. S druge strane na središnjem grafu je interakcija i te kako prisutna, naime točke su "razbacane tako da izbjegavaju jedna drugu". U principu, ako su točke zaista nezavisno razbacane, one neće težiti niti tome da se međusobno izbjegavaju (kao na grafu u sredini), niti tome da se grupiraju (kao na desnom grafu), nego će naprosto zauzimati pozicije u prostoru potpuno nezavisno o pozicijama drugih točaka.
Recimo na kraju da smo u radu zagrebli tek mali dio teorije o Poissonovim točkovnim procesima. Premda pojave koje njima opisujemo susrećemo često u životu i svima su nam lako zamislive, matematički aparat koji se koristi za njihovu formalnu definiciju dosta je napredan i složen te je trebalo mnogo godina da se razvije. Kroz jednostavne primjere, vidjeli smo kako nam poznavanje svojstava Poissonovih procesa zaista omogućuje donošenje korisnih i zanimljivih zaključaka. Iz vjerojatnosne i statističke analize poput ovih koje smo provodili u primjerima možemo izvoditi vrlo korisne zaključke u raznim disciplinama. Osim već navedenih primjera iz fizike, istim metodama mogli bismo analizirati i podatke o pozicijama stabala ili gnijezda ptica, odnosno staništima životinja općenito (statistička ekologija), pozicijama zvijezda i galaksija u svemiru (astrostatistika), pozicijama točkastih defekata u kristalima (znanost o materijalima), pozicijama neurona u moždanom tkivu, mjestima stanovanja oboljelih od neke rijetke bolesti (prostorna epidemiologija), vremenima poziva ili dolazaka poslova na računalnu mrežu (telekomunikacije i računarstvo), u procesiranju digitalnih slika, itd.

Posveta.

Članak posvećujemo sjećanju na našeg dragog kolegu, učitelja i prijatelja dr. sc. Antu Mimicu, čiji je entuzijazam i matematički interes inicirao i ovakav odabir teme.

Literatura

[1] Sarapa, N. *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[2] Spiegelhalter, D. Another tragic cluster - but how surprised should we be?, URL: http://understandinguncertainty.org/another-tragic-cluster-how-surprised-should-we-be, 2014. pristupljeno 10.11.2016.

[3] Baddeley, A. *Analysing spatial point patterns in R*, 2008., Citeseer

[4] Zorich, V. *Mathematical Analysis I*, Springer Verlag, 2002.