Dr. sc. Branka Marasović
Izvanredni profesor
Sveučilište u Splitu
Ekonomski fakultet
Katedra za kvantitativne metode
Email: branka.marasovic@efst.hr

MODEL ZA REBALANS PORTFELJA S UKLJUČENIM TRANSAKCIJSKIM TROŠKOVIMA I DONJOM POLUAPSOLUTNOM DEVIJACIJOM KAO MJEROM RIZIKA

UDK / UDC: 336.763
JEL klasifikacija / JEL classification: G10, G11
Pregledni rad / Review
Primljeno / Received: 30. svibnja 2016. / May 30, 2016
Prihvaćeno za tisak / Accepted for publishing: 7. prosinca 2016. / December 7, 2016

Sažetak

U radu se predlaže model za rebalans portfelja s uključenim transakcijskim troškovima koji se temelji na dvama kriterijima: očekivanom prinosu i riziku. Kao mjera rizika uzeta je donja poluapsolutna devijacija koja pripada skupini donjih parcijalnih mjera rizika i koja je adekvatna mjera rizika i u slučajevima kada prinosi dionica nisu normalno distribuirani. Model dopušta različite transakcijske troškove za kupnju i prodaju dionica. Da bismo pronašli efikasan portfelj predloženim modelom, potrebno je riješiti problem linearnog programiranja. Nadalje, u radu je model primijenjen na hrvatskom tržištu kapitala kako bi se istražio utjecaj transakcijskih troškova na rebalans portfelja, odnosno kako bi se ispitalo nadmašuje li korist od aktivnog upravljanja portfeljem transakcijske troškove koji su nastali rebalansom.

Ključne riječi: rebalans portfelja, donje parcijalne mjere rizika, transakcijski troškovi

1. UVOD

Od 1952. godine, kada je H. M. Markowitz objavio svoj rad „Portfolio selection"(Markowitz, 1952), izbor optimalnog portfelja postaje aktualna tema mnogih znanstvenih radova. U svom radu H. M. Markowitz razvio je prvi model za optimizaciju portfelja koji predstavlja temelje moderne teorije portfelja. Model se temelji na dvama kriterijima: prinosu i riziku koji je mjeren varijancom. Markowitzeva ideja bila je naći ravnotežu između rizika i prinosa te izabrati portfelj dionica koji rezultira najvećim mogućim prinosom uz najmanji mogući rizik. Naravno, preuzimanjem većeg rizika moguće je očekivati i veći prinos. Dakle, njegova ideja bila je formirati matematički model za izbor portfelja koji donosi najveću stopu prinosa, ali uz određeni (unaprijed zadani) stupanj rizika. Takav portfelj, koji za zadanu stopu rizika ima najveću stopu prinosa, odnosno portfelj koji za zadanu stopu prinosa ima minimalan rizik, Markowitz je nazvao efikasnim portfeljem.

Markowitzev pristup optimizaciji portfelja zahtijeva neke stroge pretpostavke, kao što je, primjerice, normalna distribucija prinosa. Prednosti su te distribucije u tome što se definira samo dvama parametrima: varijancom i očekivanom vrijednosti. Pretpostavka normalne distribucije često se koristi u financijskoj analizi i još se uvijek smatra uobičajenom pretpostavkom mnogih teorija i na njima utemeljenih modela.

Ipak, istraživanja provedena na različitim tržištima kapitala pokazala su da pretpostavka o normalnoj distribuciji prinosa često nije zadovoljena u praksi (Mandelbrot, 1963) (Aparicio i Estrada, 1997) (Egan, 2007) (Doric i Doric, 2011). Podaci s različitih tržišta kapitala pokazali su da je najučestaliji asimetričan oblik distribucije prinosa dionica s debelim repovima. Pri takvim distribucijama varijanca nije adekvatna mjera rizika te se stoga uvode alternativne mjere rizika (Sortino i Meer, 1991), (Abdullah i Hongtao, 2010). Modeli optimizacije s alternativnim mjerama rizika analizirani su u radovima (Konno et al., 2002) (Rockafellar i Uryasev, 2000) (Giorgi, 2002) (Hoe et al., 2010).

Budući da je cilj investitora koji se rukovodi kriterijem prinosa i rizika pri izboru portfelja istovremeno maksimizirati prinos i minimizirati rizik, u ovom slučaju možemo govoriti o višekriterijskoj prirodi problema optimizacije portfelja. Međutim, ovaj problem bikriterijskog programiranja ekvivalentan je problemu jednokriterijskog programiranja s jednim kriterijem u funkciji cilja, a drugim u ograničenju, pa višekriterijski pristup rješavanju ovog problema nije nužan.

Problem optimizacije portfelja postaje u pravom smislu riječi problem višekriterijskog odlučivanja kada, osim očekivane stope prinosa i rizika, pri izboru portfelja promatramo i neke druge karakteristike vrijednosnica koje mogu biti sadržane u portfelju. Naime, suprotno očekivanjima utemeljenima na modernoj teoriji portfelja, testovi izvršeni na mnogim tržištima kapitala potvrdili su postojanje i drugih varijabli koje se mogu uzeti u obzir pri izboru portfelja.

Višekriterijska priroda izbora portfelja dobro je prezentirana u radu „Methode multicritere de selection de portefeuilles indiciels interantionaux“ (Khoury et al., 1993). Mnoge višekriterijske metode, kao što su: MAUT, AHP, PROMETHEE, ELECTRE, MINORA, ADELAIS, DEA i druge, već su primijenjene u menadžmentu portfelja (Hurson i Zopounidis, 1997) (Martel et al.,

1988) (Zopounidis, 1999) (Marasović i Babić, 2011) (Gardijan i Škrinjarić, 2015).[1]

Nadalje, jedan je od nedostataka Markowitzeva modela činjenica što nije uzeo u obzir transakcijske troškove koji nastaju prilikom formiranja portfelja ili njegovim rebalansom, a koje bi trebalo uključiti u svaku realnu analizu.

Mitchell i Braun (2002) razmatraju proširenje standardnog problema optimizacije portfelja, u koji uključuju transakcijske troškove koji nastaju pri rebalansu portfelja. Oni pokazuju da se dobiveni problem razlomljenog kvadratnog programiranja može riješiti uvođenjem supstitucije, kao problem kvadratnog programiranja koji je sličnog oblika kao kod modela bez transakcijskih troškova. Opisani model primijenjen je na hrvatskom tržištu kapitala u radovima (Marasović et al., 2015) (Škarica i Lukač, 2012). U radu (Marasović et al., 2015) istražuje se utjecaj transakcijskih troškova na efikasnu granicu s hrvatskog tržišta kapitala. Rezultati su pokazali da je efikasna granica uvijek smještena u istom intervalu rizika, bez obzira na iznos transakcijskih troškova i na inicijalni portfelj koji se rebalansira. Očekivani je prinos negativno koreliran s visinom transakcijskih troškova i volumenom transakcija.

Danas zbog volatilnosti financijskog tržišta i značajnih fluktuacija cijena dionica aktivno upravljanje investicijskim portfeljem ponekad omogućuje ostvarivanje većih prinosa u odnosu na dugoročne strategije ulaganja (Žilinskij, 2015). Aktivni menadžment portfelja također omogućuje razvoj osobnih investicijskih strategija i pruža mogućnost izbjegavanja gubitaka pri tržišnoj nestabilnosti. Ipak, aktivni menadžment portfelja nosi sa sobom i mnogo rizika. Pri rebalansu investicijskog portfelja, kako bi se postigla ili očuvala očekivana stopa prinosa, nastaju troškovi koji nisu zanemarivi i stoga je nužno da se investitori koriste prikladnom strategijom i metodom za rebalans portfelja (Žilinskij, 2015). Problemi rebalansa portfelja analizirani su u znanstvenoj literaturi vrednujući dva temeljna aspekta: strategije rebalansa portfelja i algoritme za rebalans portfelja. U radu (Dierkes et al., 2010) autori naglašavaju da se većina strategija možeu podijeliti na dvije temeljne kategorije: strategije temeljene na predviđanju i one koje se ne temelje na predviđanju. Strategije rebalansa portfelja u svojim radovima obrađivali su i (Leung, 2011), (Jones i Stine, 2010), (Cesari i Cremonini, 2003), (O'Brien, 2006), a neki od modela za rebalans portfelja donose se u radovima (Fang et al., 2006), (Zhang et al., 2010), (Zhang et al., 2011), (Gupta et al., 2012) i (Gupta et al., 2013).

U aktivnom upravljanju investicijskim portfeljem transakcijski troškovi imaju značajan utjecaj, tako da većina istraživača koja se bavi problemima

[1] Tako se npr. autori Hurson i Zopounidis u prvom dijelu rada „On the use of multicriteria decision aid methods to portfolio selection" koriste metodama MINORA i ELECTRE III za izbor atraktivnih dionica na osnovi sedam kriterija, tri financijska kriterija (prinos od dionice, pokazatelja likvidnosti, pokazatelja solventnosti) i četiri tržišna kriterija (očekivani mjesečni prinos, sistemski rizik (beta), odnos cijene i zarade (PER), zarada po dionici (EPS)). U drugom su dijelu rada autori primijenili ADELAIS interaktivni sistem za odlučivanje, namijenjen problemima za višekriterijsko linearno programiranje s ciljem određivanja udjela u portfelju atraktivnih dionica dobivenih u prvom koraku.

rebalansa portfelja posebnu pozornost posvećuje procjeni transakcijskih troškova: (Holden i Holden, 2013), (Bhattacharyya et al., 2011), (Fang et al., 2006), (Zhang et al., 2011), (Zhang et al., 2010), (Marasović et al., 2015).

Ovaj rad predstavlja nastavak na istraživanje u radu (Marasović et al., 2015) u kojem su se autori također bavili utjecajem transakcijskih troškova na rebalans portfelja, međutim koristili su se modelom s varijancom kao mjerom rizika. U ovom radu autorica razvija algoritam za rebalans investicijskog portfelja s donjom poluapsolutnom devijacijom kao mjerom rizika, procjenjuje visinu transakcijskih troškova i istražuje utjecaj transakcijskih troškova na prinos rebalansiranog portfelja s hrvatskog tržišta kapitala. Predloženi je model proširenje modela za optimizaciju portfelja s donjom poluapsolutnom devijacijom kao mjerom rizika i u model su uključeni transakcijski troškovi koji nastaju rebalansom portfelja. Kao mjera rizika koristi se donja poluapsolutna devijacija, koja je prihvatljiva mjera rizika i u slučajevima kada prinosi nisu normalno distribuirani, za razliku od varijance. Ovaj model omogućuje različite troškove za kupnju i prodaju te različite troškove pri trgovanju različitim vrijednosnicama. Navedeni model primjenjuje se na hrvatskom tržištu kapitala kako bi se istražio utjecaj transakcijskih troškova na rebalans portfelja, odnosno kako bi se ispitalo nadmašuje li korist od aktivnog upravljanja portfeljem transakcijske troškove koji su nastali rebalansom.

2. MARKOWITZEV MODEL – TEMELJNI MODEL MODERNE TEORIJE PORTFELJA

Temeljni model moderne teorije portfelja razvio je H. M. Markowitz davne 1952. godine. Markowitzev model optimizacije portfelja, koji je poznat kao MV model (*mean-variance model*), visoko je vrednovan, što se očituje i u činjenici da je za svoja dostignuća u razvoju moderne teorije portfelja Markowitz 1990. godine dobio Nobelovu nagradu iz ekonomije. Pretpostavke su modela da je funkcija korisnosti investitora kvadratna funkcija te da su prinosi vrijednosnih papira normalno distribuirani.

Osnovna Markowitzova ideja bila je naći ravnotežu između rizika (varijance prinosa portfelja) i prinosa (očekivane vrijednosti prinosa portfelja). Markowitz u svom modelu zadaje donju granicu prinosa portfelja c_1 i tada iz skupa mogućih portfelja izabire onaj koji ima minimalnu varijancu, odnosno minimalan rizik ili zadaje gornju granicu prihvatljivog rizika c_2 i onda iz mogućeg skupa portfelja izabere onaj koji maksimizira prinos.

Matematički MV model možemo zapisati u obliku:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &\min_{\pi \in R^n} \; Var(R^{\pi}) \\ &E(R^{\pi}) \geq c_1 \\ &\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(II)}\quad \begin{aligned} &\max_{\pi \in R^n} \; E(R^{\pi}) \\ &Var(R^{\pi}) \leq c_2 \\ &\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{aligned}$$

Nepoznate su varijable u ovom modelu udjeli pojedinih dionica u portfelju π_i, $i \in \{1,2,...,n\}$. Ograničenjima problema (I) i (II) moramo dodati i ograničenja nenegativnosti u slučaju zabrane kratke prodaje (Tomić-Plazibat et al., 2006).

Usporedno s uvođenjem Markowitzeva modela u široku upotrebu uviđaju se njegova ograničenja i dolazi do razvoja novih, poboljšanih matematičkih modela za optimizaciju portfelja. Zbog svojih dobrih svojstava MV model ostaje bazični model za optimizaciju portfelja i većina novih modela, koji ga slijede, temelje se na njemu. Dakle, dobro razumijevanje MV modela financijskim menadžerima omogućava da u suradnji sa stručnjacima iz različitih područja razviju nove modele optimizacije portfelja koje će temeljiti na vlastitom opažanju o specifičnostima tržišta na kojem djeluju. Tako financijske institucije iza kojih stoje značajna sredstva i koje u svom sastavu imaju timove vrhunskih stručnjaka iz različitih područja znanosti (ekonomiste, matematičare, fizičare, informatičare) stječu prednost u odnosu na konkurenciju koja se koristi manje sofisticiranim modelims.

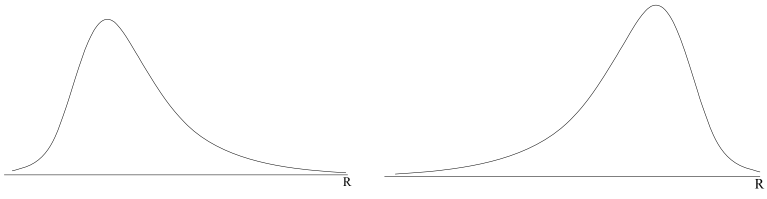
3. MODEL ZA OPTIMIZACIJU PORTFELJA S DONJOM APSOLUTNOM DEVIJACIJOM KAO MJEROM RIZIKA BEZ UKLJUČENIH TRANSAKCIJSKIH TROŠKOVA

Pretpostavke MV modela bile su polazna točka mnogih kritika. Prinosi dionica ponekad nemaju normalnu distribuciju. Većina empirijskih testova na tržištima kapitala imala je za rezultat asimetričnu i(ili) šiljastu distribuciju (Cloquette et al., 1995). Pri takvim distribucijama varijanca nije adekvatna mjera rizika te je stoga nužno uvesti alternativne mjere rizika.

Varijanca je mjera disperzije svih podataka, i onih manjih i onih većih, od očekivane vrijednosti. Međutim, želimo li kvantificirati rizik dionice, tada je očito da će investitora zanimati samo varijabilnost onih prinosa koji su manji od očekivanog prinosa dionice. Naime, dionice čiji prinosi ispod očekivane vrijednosti više variraju u odnosu na očekivanu vrijednost spadaju u rizičnije vrijednosnice.

To upućuje na zaključak da varijanca općenito nije adekvatna mjera rizika. Iznimka su slučajevi kada je varijabilnost prinosa manjih i većih od očekivane vrijednosti jednaka. Takva se situacija pojavljuje isključivo u posebnom slučaju kada su prinosi vrijednosnica normalno distribuirani, a što je jedna od pretpostavki Markowitzeva modela, kao i u slučaju kada prinosi vrijednosnica imaju neku drugu simetričnu distribuciju.

U slučaju asimetričnih distribucija varijabilnost prinosa ispod i iznad očekivane vrijednosti nije jednaka. Kod desnostranih distribucija varijabilnost prinosa ispod očekivane vrijednosti manja je nego varijabilnost prinosa iznad očekivane vrijednosti (Slika 1a.).



Slika 1. a) Primjer desnostrane distribucije b) Primjer ljevostrane distribucije

Nasuprot tome, ako prinosi dionica imaju ljevostranu distribuciju, tada će varijabilnost prinosa ispod očekivane vrijednosti biti veća nego varijabilnost prinosa iznad očekivane vrijednosti (Slika 1. b)).

Iz prethodno navedenog, da bi se omogućila adekvatna procjena rizika i u slučajevima kada distribucija prinosa nije simetrična, bilo je nužno definirati nove mjere rizika koje uzimaju u obzir odstupanja samo onih prinosa koji su manji od očekivanog prinosa ili nekog ciljanog prinosa. Općenito, takve mjere rizika nazivamo donjim parcijalnim mjerama rizika. U donje parcijalne mjere rizika ubrajaju se: donja poluapsolutna devijacija, donja polustandardna devijacija, dona poluvarijanca, podciljni rizik, rizičnost vrijednosti (VaR), uvjetna rizičnost vrijednosti CvaR (Marasović i Šego, 2006).

Donje parcijalne mjere rizika potpuno zadovoljavaju sustav aksioma za mjere rizika koje su u svom radu iznijeli (Pedersen and Satchell, 1998). Prema sustavu aksioma, za mjeru rizika mora vrijediti:

[1] Nenegativnost: $Rizik(X) \geq 0.$

[2] Pozitivna homogenost: $Rizik\left(c * X\right) = c * Rizik\left(X\right)$ $\forall$ konstantu c

Ako se investicije multipliciraju, tada se također i rizik multiplicira.

[3] Subaditivnost: $Rizik\left(X + Y\right) \leq Rizik\left(X\right) + Rizik\left(Y\right)$

Rizik dviju kombiniranih investicija neće biti veći od zbroja pojedinačnih rizika tih dviju investicija (efekt diversifikacije).

[4] Invarijantnost na pomak: $Rizik\left(X + c\right) \leq Rizik\left(X\right)$ $\forall$ konstantu c

Mjera je invarijantna na zbrajanje s konstantom.

Gotove sve mjere rizika, pa tako i donje parcijalne mjere rizika, mogu se promatrati kao specijalni slučaj familije troparametarskih mjera rizika (Zeleny, 1982):

$$\Omega(c,\alpha,\lambda)=\sum_{R_k\le\lambda}\left|R_k-c\right|^{\alpha}p_k,\ \text{odnosno}\ \Omega(c,\alpha,\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\left|R_k-c\right|^{\alpha}dF(R),\ (1)$$

gdje je p_k vjerojatnost prinosa, R_k, c je referentni prinos od kojeg mjerimo odstupanje. Na primjer, c može biti aritmetička sredina, nula, mod, medijan itd. Devijacije prinosa potenciraju se parametrom α, stoga on reflektira relativnu važnost odstupanja prinosa od referentnog prinosa. Što se uzme veća vrijednost za α, to je veći utjecaj najvećeg odstupanja u mjeri rizika. Parametar λ specificira koji će se prinosi uključitii u mjeru rizika.

U nastavku će rada fokus biti na donjoj poluapsolutnoj devijaciji, odnosno modelu za optimizaciju portfelja koji se temelji na promatranoj mjeri rizika.

Donja poluapsolutna devijacija prinosa $R(\pi)$definira se izrazom:

$$W_{-}(\pi)=E\left[\left|R(\pi)-E\left(R^{\pi}\right)\right|_{-}\right]. \qquad (2)$$

Ta mjera rizika uzima u obzir samo prinose koji su manji od očekivane vrijednosti prinosa i računa očekivanu vrijednost odstupanja tih prinosa od očekivanog prinosa. Dakle, ona se ubraja u familiju troparametarskih mjera rizika, koje su dane relacijom (1), pri čemu je $\alpha=1$,, c = $\lambda=E\left(R^{\pi}\right)$. Budući je $\alpha=1$, utjecaj najvećeg odstupanja u mjeri rizika nije velik. Stoga je ova mjera prikladna kad investitori ne žele preveliku važnost davati ekstremnim događajima koji su vrlo rijetki.

Pretpostavimo nadalje da su prinosi vrijednosnica $R=(R_1,R_2,...R_n)$ distribuirani na konačnom skupu točaka $r_t=(r_{1,t},r_{2,t},...,r_{n,t})$, $t\in\{1,2,...,T\}$. [2] Te su točke dobivene ili izravno iz povijesnih podataka ili simulacijom. Nadalje, neka je p_t, $t\in\{1,2,...,T\}$, vjerojatnost da R poprimi vrijednost $r_t=(r_{1,t},r_{2,t},...,r_{n,t})$ u trenutku t (obično se uzima $p_t=\dfrac{1}{T}$ čime se pretpostavlja da su svi r_t , $t\in\{1,2,...,T\}$ jednako vjerojatni) i neka je:

[2] U praksi imamo konačni broj empirijskih podataka. Iz tih razloga problem optimizacije portfelja formuliramo diskretno.

$$W = \left\{ \left(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n \right) \middle| \sum_{j=1}^{n} E(R_j)\pi_j \geq \rho, \ \sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1, \ l \leq \pi_j \leq u, \ j = 1, 2, ..., n \right\} \quad (3)$$

skup mogućih portfelja, a ρ, l i u odgovarajuće konstante.

Iz prethodno navedenog znamo da je mjera rizika donja poluapsolutna devijacija dana izrazom:

$$E\left[\left| R(\pi) - E\left(R^{\pi}\right) \right|_{-} \right] = \sum_{i=1}^{T} p_t \left| \sum_{j=1}^{n} \left(r_{j,t} - E\left(R_j\right) \right) \pi_j \right|_{-} . \quad (4)$$

Stoga model optimizacije portfelja s donjom poluapsolutnom devijacijom kao mjerom rizika možemo pisati u obliku:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{T} p_t \left| \sum_{j=1}^{n} \left(r_{j,t} - E\left(R_j\right) \right) \pi_j \right|_{-} \quad (5)$$

uz ograničenje $\left(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n \right) \in W$.

Rješavanje tog problema svodi se na rješavanje problema linearnog programiranja (Konno et al., 2002):

$$\min \quad \sum_{i=1}^{T} p_t z_t \quad (6)$$

uz ograničenja

$$z_t \geq -\sum_{j=1}^{n} \left(r_{j,t} - E\left(R_j\right) \right) \pi_j, \ t \in \{1, 2, ..., T\},$$

$$z_t \geq 0, \ t \in \{1, 2, ..., T\},$$

$$\left(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n \right) \in W.$$

Optimalno rješenje $\left(\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_n^*, z_1^*, z_2^*, ..., z_T^* \right)$ tog problema zadovoljava relaciju:

$$z_t^* = \max \left\{ -\sum_{j=1}^{n} \left(r_{j,t} - E\left(R_j\right) \right) \pi_j^*, 0 \right\} = \left| \sum_{j=1}^{n} \left(r_{j,t} - E\left(R_j\right) \right) \pi_j^* \right|_{-} \quad (7)$$

Stoga je $\left(\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_n^* \right)$ optimalno rješenje polaznog modela.

4. MODEL ZA REBALANS PORTFELJA S DONJOM APSOLUTNOM DEVIJACIJOM KAO MJEROM RIZIKA S UKLJUČENIM TRANSAKCIJSKIH TROŠKOVIMA

U nastavku rada u prethodno prezentirani model za optimizaciju portfelja s donjom poluapsolutnom devijacijom kao mjerom rizika uključit će se transakcijski troškovi.

Uključivanjem transakcijskih troškova u model optimizacije portfelja ukupan iznos kojim investitor na početku raspolaže smanjuje se jer dio sredstava otpada na troškove kupnje ili prodaje dionica prilikom rebalansa portfelja. Neka investitor posjeduje portfelj $\overline{\pi}$ i želi ga promijeniti tako da njegov novi portfelj π bude efikasan. Portfelj se mora rebalansirati periodično, onako kako se mijenjaju informacije o prinosu i riziku vrijednosnica iz portfelja. Nadalje, bilo koja promjena investicijskih odluka, kao što je na primjer promjena prihvatljive razine rizika ili minimalne stope očekivanog prinosa, zahtijevat će rebalans portfelja.

Osim standardnih brokerskih naknada, ovim modelom mogu se modelirati i troškovi poreza na kapitalnu dobit.

Uvedimo oznake u_i i v_i za iznos kupnje, odnosno prodaje vrijednosnice *i*. Portfelj koji se dobije nakon rebalansa početnog portfelja $\overline{\pi}$ dan je formulom:

$$\pi = \overline{\pi} + u - v. \tag{8}$$

Neka nadalje C_{Bi} i C_{Si} označavaju transakcijske troškove kupnje i prodaje jedne jedinice vrijednosnice *i*.

Pretpostavljamo, $0 \le C_{Bi} < 1,\ 0 \le C_{Si} < 1 \forall i$ i da $\exists i$ za koji je $C_{Bi} + C_{Si} > 0$.

Označimo s x_0 ukupan iznos potrošen na transakcijske troškove. Dakle, vrijedi:

$$x_0 = C_B^T u + C_S^T v. \tag{9}$$

Ukupan iznos investiran u portfelj nakon što su podmireni transakcijski troškovi bit će $1 - x_0$. Iz prethodnih dviju relacija slijedi ograničenje:

$$e^T \pi = 1 - C_B^T u - C_S^T v. \tag{10}$$

Ako iskoristimo relaciju $e^T \overline{\pi} = 1$, dobivamo:

$$e\pi^T = e^T\pi - e^T u + e^T v - C_B^T u - C_S^T v. \quad (11)$$

Dobivena je jednadžba:

$$\left(C_B + e\right)^T u + \left(C_S - e\right)^T v = 0. \quad (12)$$

Jednadžbama (8) i (12) koristit ćemo se kao ograničenjima u modelu za rebalans portfelja. Kao mjera rizika koristit će se donja poluapsolutna devijacija, koja je prihvatljiva mjera rizika i u slučajevima kada prinosi nisu normalno distribuirani. Model za rebalans portfelja s uključenim transakcijskim troškovima formirat ćemo minimizirajući funkciju cilja koja predstavlja rizik portfelja mjeren donjom poluapsolutnom devijacijom, dok očekivani prinos portfelja ne smije biti manji od neke zadane razine E_0.

Razvijeni model ima oblik:

$$\min(p^T z) \quad (13)$$

$$z \geq \frac{A\pi}{1 - C_B^T u - C_S^T v}$$

$$E(R)^T \pi \geq \mathrm{E}_0$$

$$\pi - u + v = \bar{\pi}$$

$$\left(C_B + e\right)^T u + \left(C_S - e\right)^T v = 0$$

$$u, v, \pi, z \geq 0$$

Pri čemu su $p_t,\ t \in \{1, 2, ..., T\}$, u vektoru $= \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_T \end{bmatrix}$ vjerojatnost da R poprimi vrijednost $r_t = \left(r_{1,t}, r_{2,t}, ..., r_{n,t}\right)\ t \in \{1, 2, ..., T\}$.

Elementi vektora $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_T \end{bmatrix}$ pomoćne su varijable modela;

$E(R) = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_N) \end{bmatrix}$ je vektor očekivanih prinosa vrijednosnica;

$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix}$ je vektor rebalansiranog portfelja;

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$ je vektor iznosa kupnje vrijednosnica prilikom rebalansa portfelja;

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$ je vektor iznosa prodaje vrijednosnica prilikom rebalansa portfelja;

$C_B = \begin{bmatrix} C_{B1} \\ \vdots \\ C_{BN} \end{bmatrix}$ i $C_S = \begin{bmatrix} C_{S1} \\ \vdots \\ C_{SN} \end{bmatrix}$ su vektori transakcijskih troškova kupnje i prodaje vrijednosnica;

a matrica A je oblika $A = \begin{bmatrix} E(R_1) - R_{11} & \cdots & E(R_N) - R_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(R_1) - R_{T1} & \cdots & E(R_N) - R_{TN} \end{bmatrix}$.

Dobiveni model razlomljenog linearnog programiranja svodi se na model linearnog programiranja supstitucijom (Charnes and Cooper, 1962):

$$t := \frac{1}{1 - C_B^T u - C_S^T v}, \quad \hat{u} := tu\ ,\ \hat{v} := tv\ ,\quad \hat{\pi} := t\pi\ . \tag{14}$$

Konačno, model za rebalans portfelja s uključenim transakcijskim troškovima i donjom poluapsolutnom devijacijom ima oblik:

$$\min(p^T z) \tag{15}$$

$$z - A\hat{\pi} \geq 0$$

$$E(R)^T \hat{\pi} - E_0 t \geq 0$$

$$\hat{\pi} - \hat{u} + \hat{v} - \bar{\pi} t = 0$$

$$\left(C_B + e\right)^T \hat{u} + \left(C_S - e\right)^T \hat{v} = 0$$

$$t - C_B^T \hat{u} - C_S^T \hat{v} = 1$$

$$\hat{u}, \hat{v}, \hat{\pi}, t, z \geq 0$$

5. PRIMJENA MODELA ZA REBALANS PORTFELJA NA HRVATSKOM TRŽIŠTU KAPITALA

Prikazani model primijenit će se na hrvatskom tržištu kapitala s ciljem ispitivanja nadmašuje li korist od aktivnog upravljanja portfeljem transakcijske troškove koji su nastali rebalansom.

Analiza će se provesti na uzorku deset dionica sa Zagrebačke burze koje se nalaze u sastavu indeksa CROBEX10. Promatrane dionice donose se u Tablici 1.

Tablica 1.

Sastavnice indeksa CROBEX10

Simbol	Izdavatelj
ADPL-R-A	AD Plastik d. d.
ADRS-P-A	Adris grupa d. d.
ATGR-R-A	Atlantic Grupa d. d.
ERNT-R-A	Ericsson Nikola Tesla d. d.
HT-R-A	HT d. d.
INA-R-A	INA d. d.
KOEI-R-A	Končar – Elektroindustrija d. d.
KRAS-R-A	Kraš d. d.
PODR-R-A	Podravka d. d.
RIVP-R-A	VALAMAR RIVIERA d. d.

Izvor: Zagrebačka burza

Analiza se provodi na temelju tjednih prosječnih cijena u razdoblju od 2. siječnja 2015. do 15. siječnja 2016. godine. Iz cijena dionica izračunati su prinosi dionica u promatranom razdoblju, na temelju kojih je procijenjen očekivani prinos u sljedećem tjednu. Primjenom Kolmogorov – Smirnov testa u MATLAB-u testirana je normalna distribucija prinosa dionica. Ovaj test nije bio nužan jer se predloženi model može primijeniti i u slučaju kada prinosi imaju normalnu distribuciju, kao i onda kad imaju neki drugi oblik distribucije. Ipak, s ciljem ispitivanja je li jedna od pretpostavki temeljnog modela moderne teorije portfelja ispunjena na hrvatskom tržištu kapitala, izvršili smo testiranje. Iako to i nije čest slučaj, test je pokazao da tjedni prinosi svih dionica prate normalnu distribuciju (Slika 2.), pa je u ovom slučaju zadovoljena pretpostavka Markowitzeva modela, koja inače u praksi često zna biti neispunjena.

Posebno od normalne distribucije znaju odstupati dnevni prinosi jer se na dnevnoj razini mogu pojavljivati ekstremno mali i ekstremno veliki prinosi češće nego što je to slučaj kod normalne distribucije. Tada distribucije dnevnih prinosa imaju zadebljane krajeve. Međutim, kada se u analizu uzimaju tjedni, a pogotovo mjesečni podaci, zadebljani krajevi distribucije prinosa znaju iščezavati i prinosi imaju normalnu distribuciju, kao što je to slučaj i na analiziranom uzorku. Budući da se predloženi model može primijeniti i kada podaci imaju normalnu distribuciju i kad imaju neki drugi oblik distribucije, može se nastaviti s analizom.

```
Testiranje normalne distribucije prinosa deset dionica sa Zagrebačke burze
for i=1:10
pd=makedist('Normal', 'mu', mu(i), 'sigma', sigma(i));
[h(i), p(i)]=kstest(prinosi(:,i),'CDF',pd);
end
h,p
```

```
h =
    0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
p =
  Columns 1 through 7
    0.1979    0.3335    0.7064    0.4417    0.3410    0.0995    0.7975
  Columns 8 through 10
    0.0975    0.9078    0.2725
```

Slika 2. Rezultati Kolmogorov – Smirnov testa dobiveni primjenom MATLAB-a

Izvor: Izradila autorica

Razina transakcijskih troškova u analizi iznosi 0,3% i 1,25% jer se u tom intervalu kreću brokerske naknade brokerskih kuća u Hrvatskoj (Dolenec, 2014). Kao inicijalni portfelj koji se rebalansira uzet je portfelj s jednakim udjelima svih dionica u portfelju. Za rebalans portfelja primijenjen je model prikazan u poglavlju 4. Dobiveni matematički model temeljen na navedenim podacima predstavlja problem linearnog programiranja s 82 varijable i 64 ograničenja te je postavljen i riješen primjenom MS Excela i MATLAB-a. Mijenjanjem razine očekivanog prinosa izračunati su efikasni portfelji dobiveni rebalansom inicijalnog portfelja.

Tablica 2.

Efikasni portfelji dobiveni rebalansom inicijalnog portfelja za brokerske naknade od 0,3%

ADPL-R-A	ADRS-P-A	ATGR-R-A	ERNT-R-A	HT-R-A	INA-R-A	KOEI-R-A	KRAS-R-A	PODR-R-A	RIVP-R-A	Donja polu-apsolutna devijacija	Očekivani prinos
0,69%	0,00%	3,61%	6,07%	4,60%	10,44%	14,36%	41,80%	0,00%	17,74%	0,30%	0,10%
0,69%	0,00%	9,60%	0,89%	3,71%	8,86%	13,13%	42,31%	0,00%	20,12%	0,31%	0,14%
0,69%	0,00%	8,41%	0,20%	2,37%	7,83%	12,97%	44,56%	0,00%	22,28%	0,32%	0,17%
0,69%	0,00%	5,11%	0,66%	1,36%	6,88%	13,05%	47,43%	0,00%	24,13%	0,33%	0,21%
0,69%	0,00%	1,97%	0,00%	3,25%	5,37%	12,71%	50,94%	0,00%	24,38%	0,34%	0,24%
0,69%	0,00%	0,00%	0,00%	4,93%	4,44%	9,47%	55,53%	0,00%	24,24%	0,35%	0,28%
0,69%	0,00%	0,00%	0,00%	6,89%	2,80%	4,92%	59,90%	0,00%	24,10%	0,36%	0,32%
0,69%	0,00%	0,00%	0,00%	7,55%	0,00%	3,37%	62,20%	0,00%	25,50%	0,37%	0,35%
0,69%	0,00%	0,00%	0,00%	4,46%	0,00%	0,97%	65,04%	0,00%	28,14%	0,39%	0,39%
0,69%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,63%	0,00%	70,81%	0,00%	27,18%	0,41%	0,42%
0,69%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	87,15%	0,00%	11,47%	0,48%	0,46%

Izvor: Izradila autorica

Tablica 3.

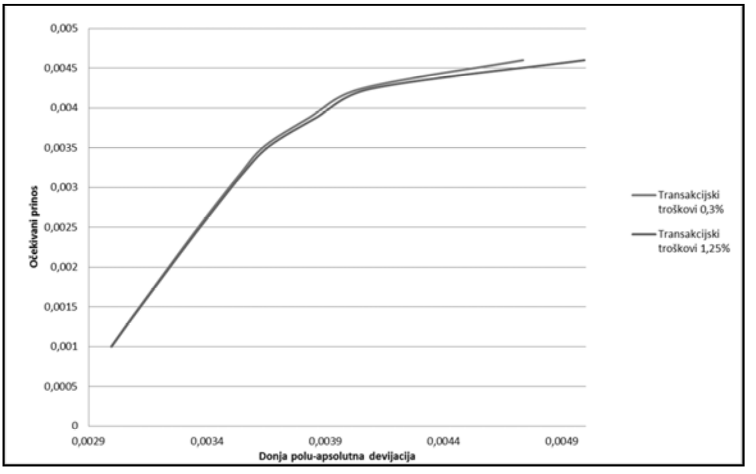
Efikasni portfelji dobiveni rebalansom inicijalnog portfelja za brokerske naknade od 1,25%

ADPL-R-A	ADRS-P-A	ATGR-R-A	ERNT-R-A	HT-R-A	INA-R-A	KOEI-R-A	KRAS-R-A	PODR-R-A	RIVP-R-A	Donja polu-apsolutna devijacija	Očekivani prinos
2,41%	0,00%	3,80%	5,00%	5,82%	10,31%	13,06%	40,92%	0,00%	16,27%	0,31%	0,10%
2,41%	0,00%	6,93%	1,61%	4,75%	8,95%	12,26%	42,12%	0,00%	18,56%	0,32%	0,14%
2,41%	0,00%	5,54%	1,04%	3,40%	7,94%	12,12%	44,42%	0,00%	20,72%	0,33%	0,17%
2,41%	0,00%	1,13%	2,35%	1,86%	7,16%	12,44%	47,45%	0,00%	22,79%	0,34%	0,21%
2,41%	0,00%	0,00%	0,58%	3,47%	5,57%	11,86%	50,38%	0,00%	23,33%	0,34%	0,24%
2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	8,02%	3,60%	6,24%	55,73%	0,00%	21,60%	0,36%	0,28%
2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	9,42%	0,02%	5,20%	57,66%	0,00%	22,88%	0,37%	0,32%
2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	7,14%	0,00%	2,08%	61,01%	0,00%	24,94%	0,38%	0,35%
2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	3,66%	0,00%	0,05%	63,60%	0,00%	27,87%	0,40%	0,39%
2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	71,21%	0,00%	23,97%	0,42%	0,42%
2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	90,94%	0,00%	4,24%	0,54%	0,46%

Izvor: Izradila autorica

Iz dobivenih rezultata prikazanih u Tablici 2. i Tablici 3. te na Slici 3. može se uočiti da je za zadanu stopu prinosa rizik rebalansiranog portfelja manji ako su transakcijski troškovi manji. Kao što se može očekivati u svim slučajevima, za različite razine zahtijevanog prinosa rizik rebalansiranih portfelja uz transakcijske troškove 0,3% bio je manji u odnosu na rebalansirane portfelje uz transakcijske troškove 1,25%. Drugim riječima, kada su transakcijski troškovi veći, investitor se mora izložiti većem riziku kako bi ostvario željeni očekivani prinos.

Iz rezultata također možemo uočiti da sume udjela u portfelju nisu jednake 1. Razlog je tome u činjenici da je dio sredstava utrošen za rebalans portfelja. U skladu s očekivanim, suma udjela u rebalansiranim portfeljima pri brokerskoj naknadi 0,3% veća je nego za naknadu 1,25%, što znači da je veći dio inicijalnog uloga otpao na transakcijske troškove.



Slika 3. Efikasne granice nakon rebalansa portfelja

Izvor: Izradila autorica

U nastavku rada ispitano je kolike su prinose ostvarili rebalansirani portfelji u sljedećem tjednu. Izračunati su prinosi dionica u tjednu od 15. siječnja 2016. do 22. siječnja 2016. Na temelju prinosa dionica izračunati su prinosi portfelja iz Tablice 2. i Tablice 3. Dobiveni rezultati prikazani su u Tablici 4.

Tablica 4.

Ostvareni prinosi rebalansiranih portfelja u tjednu od 15. siječnja 2016. do 22. siječnja 2016.

Brokerska naknada 0,3%	**Brokerska naknada 1,25%**
Ostvareni prinos rebalansiranih portfelja u sljedećem tjednu	
0,73%	0,68%
0,75%	0,68%
0,72%	0,65%
0,67%	0,60%
0,57%	0,52%
0,47%	0,33%
0,32%	0,12%
0,16%	0,12%
0,17%	0,14%
0,25%	0,18%
0,20%	0,16%

Izvor: Izradila autorica

Može se uočiti da su svi portfelji koji su dobiveni uz brokersku naknadu 0,3% u sljedećem tjednu ostvarili veći prinos od portfelja dobivenih rebalansom uz brokersku naknadu 1,25%. U daljnjoj analizi izračunat je prinos inicijalnog portfelja, s jednakim udjelima svih dionica, u tjednu od 15. siječnja 2016. do 22. siječnja 2016. Prinos inicijalnog portfelja u promatranom tjednu iznosi 0,55%. Može se uočiti da je prinos početnog portfelja veći od prinosa većine rebalansiranih portfelja. Stoga se dolazi do zaključka da aktivno upravljanje portfeljem i rebalans portfelja na tjednoj razini nisu uvijek isplativi. Naime, iako inicijalni portfelj nije efikasan, njegov ostvareni prinos veći je od prinosa efikasnog portfelja nakon rebalansa jer je dio inicijalnog uloga potrošen za brokerske naknade.

6. ZAKLJUČAK

U radu je razvijen model za rebalans portfelja s donjom poluapsolutnom devijacijom kao mjerom rizika i s uključenim transakcijskim troškovima. Dobiveni problem matematičkog programiranja predstavlja problem razlomljenog linearnog programiranja koji se supstitucijom svodi na problem linearnog programiranja. Razvijeni model primijenjen je na hrvatskom tržištu kapitala. Analizom je utvrđeno da je za zadanu stopu prinosa rizik rebalansiranog portfelja manji ako su transakcijski troškovi manji, odnosno u slučaju kada su transakcijski troškovi veći, investitor se mora izložiti većem riziku kako bi ostvario željeni očekivani prinos. Također, portfelji dobiveni rebalansom inicijalnog portfelja uz niže transakcijske troškove ostvarili su u sljedećem razdoblju veće prinose od portfelja dobivenih rebalansom uz više transakcijske troškove. Međutim, empirijskom analizom na uzorku deset dionica sa Zagrebačke burze dobiveno je da je prinos inicijalnog portfelja veći nego prinos većine rebalansiranih portfelja. Stoga se dolazi do zaključka da aktivno upravljanje portfeljem i njegovo rebalansiranje na tjednoj razini nije uvijek isplativo. Naime, iako inicijalni portfelj nije efikasan, njegov ostvareni prinos veći je nego prinos efikasnog portfelja dobivenog nakon rebalansa jer je dio inicijalnog uloga otpao na transakcijske troškove.

Bitno je naglasiti da je istraživanje provedeno na malom uzorku dionica s hrvatskog tržišta kapitala, koje je tržište u razvoju, i bilo bi zanimljivo takvo istraživanje provesti i na većem uzorku dionica s nekog od razvijenih tržišta kapitala. Nadalje, u daljnjim istraživanjima u vezi s ovom temom bilo bi zanimljivo uključiti transakcijske troškove i u ostale modele s donjim parcijalnim mjerama rizika. Također, bilo bi zanimljivo istražiti uz koju razinu transakcijskih troškova korist od aktivnog upravljanja portfeljem nadmašuje transakcijske troškove koji su nastali rebalansom.

LITERATURA

Aparicio, F.; Estrada, J. (1997). „Empirical Distributions of Stock Returns: European Securities Markets, 1990-95“. *Business Economics Series*, Vol. 2, Universidad Carlos de la Empresa, Spain.

Bhattacharyya, R.; Kar, S.; Majumder, D. D. (2011). „Fuzzy mean–variance–skewness portfolio selection models by interval analysis“. *Comput. Math. Appl.*, Vol. 61, pp. 126-137. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.039.

Cesari, R.; Cremonini, D. (2003). „Benchmarking, portfolio insurance and technical analysis: a Monte Carlo comparison of dynamic strategies of asset allocation“. *J. Econ. Dyn. Control*, Vol. 27, pp. 987-1011. DOI: 10.1016/S0165-1889(02)00052-0.

Charnes, A.; Cooper, W. W. (1962). „Programming with linear fractional functionals“. *Nav. Res. Logist. Q.*, Vol. 9, pp. 181-186. DOI: 10.1002/nav.3800090303.

Cloquette, J.-F.; Gérard, M.; Hadhri, M. (1995). „An empirical analysis of Belgian daily returns using GARCH models“. *Bruss. Econ. Rev.*, Vol. 148, pp. 513-534.

Dierkes, M.; Erner, C.; Zeisberger, S. (2010). „Investment horizon and the attractiveness of investment strategies: A behavioral approach“. *J. Bank. Finance*, Vol. 34, pp. 1032-1046. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2009.11.003.

Dolenec, G. (2014). „Brokeri u Hrvatskoj su konkurentniji od slovenskih, evo zašto...“. http://www.poslovni.hr/burze/brokeri-u-hrvatskoj-su-konkurentniji-od-slovenskih-evo-zasto-222728 (13. 5. 2016.)

Doric, D.; Doric, E. N. (2011). „Return Distribution and Value at Risk Estimation for BELEX15“. *Journal of Operations Research*, Vol. 21, pp. 103-118.

Egan, W. J. (2007). „The Distribution of S&P Index Returns“. Unpublished research report. papers.ssrn.com.

Fang, Y.; Lai, K. K.; Wang, S.-Y. (2006). „Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory“. *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 175, pp. 879-893. DOI: 10.1016/j.ejor.2005.05.020.

Gardijan, M.; Škrinjarić, T. (2015). „Equity portfolio optimization: A DEA based methodology applied to the Zagreb Stock Exchange“. *Croat. Oper. Res. Rev.*, Vol. 6, pp. 405-417.

Giorgi, D. E. (2002). „A Note on Portfolio Selection under Various Risk Measures“ (SSRN Scholarly Paper No. ID 762104). Rochester, NY: Social Science Research Network.

Gupta, P.; Mittal, G.; Mehlawat, M. K. (2012). „A multicriteria optimization model of portfolio rebalancing with transaction costs in fuzzy environment“. *Memetic Comput.*, Vol. 6, pp. 61-74. DOI: 10.1007/s12293-012-0102-2.

Gupta, P.; Mittal, G.; Mehlawat, M. K. (2013). „Expected value multiobjective portfolio rebalancing model with fuzzy parameters“. *Insur. Math. Econ.*, Vol. 52, pp. 190-203. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2012.12.002.

Hoe, L. W.; Hafizah, J. S.; Zaidi, I. (2010). „An empirical comparison of different risk measures in portfolio optimization“. *Bus. Econ. Horiz.*, Vol. 1, pp. 39-45.

Holden, H.; Holden, L. (2013). „Optimal rebalancing of portfolios with transaction costs“. *Stoch. Int. J. Probab. Stoch. Process.*, Vol. 85, pp. 371-394. DOI: 10.1080/17442508.2011.651219.

Hurson, C.; Zopounidis, C. (1997). „On The Use Of Multicriteria Decision Aid Methods To Portfolio Selection“. In: Clímaco, P. J. (ed.) *Multicriteria Analysis. Springer Berlin Heidelberg*, pp. 496-507.

Jones, S. K.; Stine, J. B. (2010). „Expected utility and the non-normal returns of common portfolio rebalancing strategies“. *J. Asset Manag.*, Vol. 10, pp. 406-419. DOI: 10.1057/jam.2009.22.

Khoury, N.; Martel, J.-M.; Veilleux, M. (1993). „Méthode multicritère de sélection de portefeuilles indiciels internationaux“. *Actual. Économique*, Vol. 69, p. 171. DOI: 10.7202/602101ar.

Konno, H.; Waki, H.; Yuuki, A. (2002). „Portfolio Optimization under Lower Partial Risk Measures“. *Asia-Pac. Financ. Mark.*, Vol. 9, pp. 127-140. DOI: 10.1023/A:1022238119491.

Leung, A. P. (2011). „Reactive investment strategies“. *Insur. Math. Econ.*, Vol. 49, pp. 89-99.

Mandelbrot, B. (1963). „The Variation of Certain Speculative Prices“. *J. Bus.*, Vol. 36, No. 4, pp. 394-419.

Marasović, B.; Babić, Z. (2011). „Two-step multi-criteria model for selecting optimal portfolio“. *Int. J. Prod. Econ., Enterprise risk management in operations*, Vol. 134, pp. 58-66. DOI: 10.1016/j.ijpe.2011.04.026.

Marasović, B.; Pivac, S.; Vukasovic, V. (2015). „The Impact of Transaction Costs on Rebalancing an Investment Portfolio in Portfolio Optimization“. *Int. J. Soc. Behav. Educ. Econ. Bus. Ind. Eng.*, Vol. 9, pp. 844-849.

Marasović, B.; Šego, B. (2006). „Izbor optimalnog portfelja alternativnim mjerama rizika“. *Računov. Financ.*, Vol. 7, pp. 66-71.

Markowitz, H. (1952). „Portfolio Selection“. *J. Finance*, Vol. 7, pp. 77-91. DOI: 10.2307/2975974.

Martel, J.-M.; Khoury, N. T.; Bergeron, M. (1988). „An Application of a Multicriteria Approach to Portfolio Comparisons“. *J. Oper. Res. Soc.*, Vol. 39, pp. 617-628. DOI: 10.2307/2582183.

Mitchell, J. E.; Braun, S. (2002). *Rebalancing an investment portfolio in the presence of transaction costs*. Rensselaer Polytechnic Inst.

O'Brien (2006). „Rebalancing: A Tool for Managing Portfolio Risk". *J. Financ. Serv. Prof.*, Vol. 60, pp. 62-68.

Pedersen, C. S.; Satchell, S. E. (1998). „An Extended Family of Financial-Risk Measures". *Geneva Risk Insur. Rev.*, Vol. 23, pp. 89-117.

Rockafellar, R. T.; Uryasev, S. (2000). „Optimization of Conditional Value-at-Risk". *J. Risk*, Vol. 2, pp. 21-41.

Siew, L. W.; Jaaman, S. H. H.; Ismail, H. B. (2015). „An empirical comparison of different optimization models in enhanced index tracking problem". *Advanced Science Letters*, Vol. 21, No. 5, pp. 1278-1281.

Sheikh, A. Z.; Qiao, H. (2010). „Non-Normality of Market Returns: A Framework for Asset Allocation Decision Making (Digest Summary)". *Journal of Alternative Investments*, Vol. 12, No. 3, pp. 8-35.

Sortino, F. A.; van der Meer, R. (1991). „Downside Risk". *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 17, No. 4, pp. 27-31.

Škarica, B.; Lukač, Z. (2012). „A Comparison of Basic and Extended Markowitz Model on Croatian Capital Market". *Croat. Oper. Res. Rev.*, Vol. 3, pp. 236-244.

Tomić-Plazibat, N.; Aljinović, Z.; Marasović, B. (2006). *Matematički modeli u financijskom upravljanju*. Split: Ekonomski fakultet u Splitu.

Zagrebačka burza. http://zse.hr/default.aspx?id=44101&index=CROBEX10 (3. 10. 2016.)

Žilinskij, G. (2015). „Investment Portfolio Rebalancing Decision Making". *Eur. Sci. J.*, Vol. 3, pp. 61-69.

Zeleny, M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill.

Zhang, W.-G.; Xiao, W.-L.; Xu, W.-J. (2010). „A possibilistic portfolio adjusting model with new added assets". *Econ. Model.*, Vol. 27, pp. 208-213. DOI: 10.1016/j.econmod.2009.08.008.

Zhang, W.-G.; Zhang, X.; Chen, Y. (2011). „Portfolio adjusting optimization with added assets and transaction costs based on credibility measures". *Insur. Math. Econ.*, Vol. 49, pp. 353-360. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2011.05.008.

Zopounidis, C. (1999). „Multicriteria decision aid in financial management". *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 119, pp. 404-415.

Branka Marasović, PhD

Associate professor
University of Split
Faculty of Economics
Department of Quantitative Methods
Email: branka.marasovic@efst.hr

PORTFOLIO REBALANCING MODEL WITH TRANSACTION COSTS AND LOWER SEMI-ABSOLUTE DEVIATION RISK MEASURE

Abstract

This paper presents a portfolio rebalancing model based on two criteria (return and risk) with transaction costs. Lower semi-absolute deviation is used as a risk measure. It belongs to the set of lower partial risk measures which are adequate measure of risk even in cases when returns are not normally distributed. The model allows different costs for buying and selling securities. In order to find efficient portfolio, using this model, the solution for a linear programming problem has to be found. Furthermore, the presented model is applied on the Croatian capital market with the aim to investigate an impact of transaction costs on rebalancing an investment portfolio and to investigate when the benefit of active portfolio management on the Croatian capital market exceeds the transaction costs of portfolio rebalancing.

Key words: Rebalancing portfolio, mean-lower partial risk measures, transaction costs

JEL classification: G10, G11