

Izvorni znanstveni članak  
*Original scientific paper*

Prispjelo – *Received*: 28.11.2005.  
Prihvaćeno – *Accepted*: 27.11.2006.

UDK: 630\*

**Karlo Bezak<sup>1</sup>**

## MODELIRANJE MULTIDIMENZIJSKE DINAMIKE ŠUMA

### MODELLING MULTI-DIMENSIONAL FOREST DYNAMICS

#### SAŽETAK

Autor istražuje sveobuhvatnu zakonitost rasta i razvoja šuma. Oslanjajući se na klasične i kvantne teorije, teorije nelinearnih dinamičkih sustava, teorije determinističkog kaosa, te osobne eksperimentalne spoznaje, otkriva formulu koja oponaša rastenje šuma. To su kompleksne jednačbe rasta i prirasta, a rješenja su kompleksni brojevi. Preslika kompleksnih brojeva u faznom prostoru su dendrogrami u kojima okomiti smjerovi prikazuju amplitude ili multidimenzionalne vektore. Vodoravni smjerovi prikazuju prostor i vrijeme. Kompleksni brojevi su skupovi koji predstavljaju moguća fizička stanja i tvore apstraktni kompleksni vektorski prostor rasta i prirasta. Integracijom kompleksnih brojeva dobiva se prirast, a daljnjom integracijom rast debljinske i visinske strukture sastojine. Kompleksni brojevi topološka su dimenzija, a skupovi kompleksnih brojeva fraktalna dimenzija šume. Kompleksne jednačbe univerzalni su alati za modeliranje multidimenzionalne dinamike šuma, numeričko utvrđivanje stanja vitalnosti stabla ili sastojine, prognozu razvoja debljinske strukture, visinskog i volumnog prirasta, konstrukciju visinskih krivulja i jednoulaznih volumnih tablica, te konstrukciju prirasno-prihodnih tablica.

**Ključne riječi:** rast i prirast, modeliranje šuma, kompleksne jednačbe, kompleksni brojevi, dendrogram, kompleksni vektorski prostor

#### PROBLEM I CILJ ISTRAŽIVANJA

##### PROBLEM AND RESEARCH OBJECTIVE

Kako zaštititi šume? O tom problemu zasjeda i Forum za šume Ujedinjenih naroda. Održivo upravljanje šumama nameće se kao jedan od ključnih čimbenika ne samo u kontekstu zaštite okoliša, nego i u kontekstu ekonomskog i socijalnog razvoja ljudskog društva. Šuma je kaotični nelinearni dinamički sustav. Dinamički su-

---

<sup>1</sup> "Hrvatske šume" d.o.o., Zagreb, Ljudevita Farkaša Vukotinovića 2, 10000 Zagreb

stav je onaj sustav kojem se stanje tijekom vremena mijenja, sukladno s nekim pravilom ili postupkom koji zovemo dinamika. U šumama, period je vrijeme koje mora proći kada krošnja ponovo prolista. Period kada stablo formira god jest jedna godina. Rast koji se iz godinu na godinu ponavlja je periodično gibanje. Takvo gibanje može se preslikati točkama u faznom prostoru. Točke opisuju krivulje koje moraju imati zatvorenu petlju. Drugim riječima, periodičnost nam daje mogućnost nadzora nad stabilnošću šume i numeričku prognozu rasta i prirasta sastojine. Šume su titrajni sustavi koje postaju kaotične, jer posjeduju element povratne veze. Nelinearni sustavi koje proučava teorija kaosa su kompleksni sustavi u smislu kako vrlo mnogo nezavisnih varijabli uzajamno djeluju na bezbroj načina. Ti kompleksni sustavi imaju sposobnost uravnoteživanja reda i kaosa (Stewart 1996).

Cilj je istraživanja pronaći sveobuhvatnu zakonitost rasta i razvoja šuma kako bi se izradili modeli održivog razvoja šumskih ekosustava. Pronaći modele potrajnog gospodarenja koji bi sačuvali prirodnu strukturu i biološku raznolikost šuma.

## MODEL RASTA RASTA I RAZVOJA ŠUMA

### MODEL OF FOREST GROWTH AND DEVELOPMENT

Ključ spoznaje rasta i razvoja šuma su Logaritamska spirala i Zakon prigušenih sinusoidnih oscilacija. Alati za multidimenzijnsko modeliranje stabla ili sastojine su kompleksne jednačbe rasta i razvoja šuma (Bezak 1992, 1995, 2002, 2005):

$$\text{rasta debljinske strukture } \Psi_d = Ae^{-kt} \sin(\omega_{pd} t - \varphi),$$

$$\text{rasta visinske strukture } \Psi_b = Ae^{-kt} \sin(\omega_{pb} t - \varphi) - A \sin(\omega_1 t)$$

Simboli u jednačbama su:  $\Psi_d$  – kompleksni brojevi debljinske strukture;  $\Psi_b$  – kompleksni brojevi visinske strukture;  $A$  – valne amplitude,  $e$  – baza prirodnog logaritma;  $k$  – koeficijent otpora rastu;  $t$  – vrijeme;  $\omega_{pd}$  – koeficijent pulsacije debljinskog rasta;  $\omega_{pb}, \omega_1$  – koeficijenti pulsacije visinskog rasta;  $\varphi$  – fazni prostor rasta.

Jednačbe koje u sebi sadrže brzinu promjene nazivaju se diferencijalnim jednačbama. Brzina promjene neke veličine određena je razlikom između vrijednosti te veličine u dvama bliskim trenucima. Ta razlika označena je grčkim slovom  $\Psi$  (*psi*) koji zamjenjuje u izvornim jednačbama prigušenih i prisilnih gibanja brzinu promjene  $s$ .

U kompleksnim jednačbama univerzalna konstanta  $\delta = 2.664$  amplituda je  $A_D$  širenja krošnje, a njezin zbroj i skalirana vrijednost  $s\delta = 0.967$  daje amplitudu  $A_d = 5.328$  debljinskog rasta.

Amplituda  $A_{pd}$  dužine debla je *eigen*vrijednost  $\check{e} = 4.669$ , skalirana vrijednost  $s\check{e} = 4.090$  je amplituda dužine krošnje  $A_{lk}$ , a njihov zbroj  $A_b = 8.759$  amplituda je visinskog rasta.

Koeficijent pulsacije  $\omega_p$  umnožak je perioda prirasta i konstante  $\alpha$  koja približno iznosi 1/137. Zanimljivo je primijetiti da se konstanta gotovo jednake vri-

jednosti kao i konstanta  $\alpha$  pojavljuje u fundamentalnoj fizici kao jedina bezdimenzionalna konstanta sastavljena od prirodnih konstanti. Možebitna povezanost te bezdimenzionalne konstante s univerzalnim pojavama koje označavaju prijelaz iz reda u kaos i obrnuto još uvijek nije razjašnjena.

Brzina prisilnog visinskog rasta poslije druge kulminacije visinskog prirasta određena je drugim članom:  $\omega_1 = 10 (1/137)^2 = 0.000532793 \text{ god}^{-1}$

Amplitude, periodi, koeficijenti pulsacije i faze za hrast lužnjak (*Quercus robur* L.) prikazani su u Tablici 1.

Tablica 1. Univerzalni parametri sastojinske debljinske i visinske strukture hrasta lužnjaka  
 Table 1 Universal parameters of diameter and height structure of a pedunculate oak (*Quercus robur* L.) stand

Struktura Structure	Parametri debljinske i visinske strukture Diameter and height structure parameters			
	Amplituda Amplitude	Period Period	Koeficijenti pulsacije Pulsation coefficient	Faza Phase
	A	godina year	$\omega_p \text{ god}^{-1}$ $\omega_p \text{ year}^{-1}$	$\varphi \text{ god}^{-1}$ $\varphi \text{ year}^{-1}$
Prsni promjer d cm Breast diameters d cm	5.328	100/10	0.0729927	0.001
Širina krošnje D m Crown width D m	2.664	100/4	0.1824817	0.266
Visina stable h m Tree height b m	8.759	100/5	0.1459854	0.876
Visina debla h <sub>d</sub> m Stem height b <sub>d</sub> m	4.669	100/5	0.1459854	0.876
Dužina krošnje l <sub>k</sub> m Crown length l <sub>k</sub> m	4.090	100/5	0.1459854	0.876

Koeficijent otpora rastu  $k$  jedini je nelinearni parametar u kompleksnim jednadžbama. Numeričko vrednovanje stanja vitalnosti sastojine ili krošnje detektira se iteracijama koeficijenta  $k$  u kompleksnoj jednadžbi debljinskog rasta prema shemi:

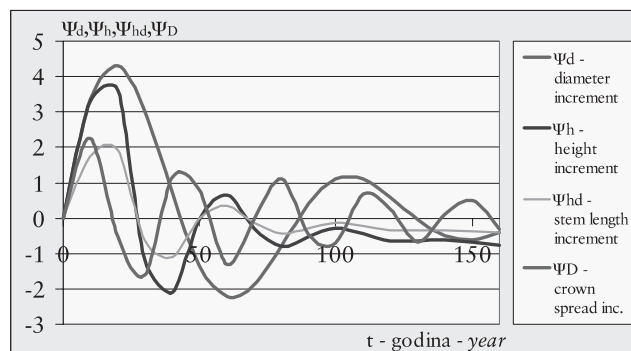
harmonično – uravnoteženo – periodično – neperiodično – kaotično  
*harmonious – balanced – periodic – non-periodic – chaotic*  
 0.001 – 0.027 – 0.050 – 0.073 – 0.999

## DENDROGRAM RASTA DEBLJINSKE I VISINSKE STRUKTURE

### DENDROGRAM OF GROWTH AND DEVELOPMENT OF DIAMETER AND HEIGHT STRUCTURE

Rješenja kompleksnih jednadžbi su *kompleksni brojevi* koji preslikani na Slici 1. pokazuju savršeni sklad odnosa debljinske i visinske strukture jednog predominantnog (najdebljeg) stabla hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.). To su *dendrogrami* u kojima okomiti smjerovi prikazuju amplitude ili multidimenzionalne vektore, a

vodoravni smjerovi prikazuju prostor i vrijeme. Razvidna je periodičnost debljinske i visinske strukture. Dendrogram debljinskog rasta  $\Psi_d$  i rasta krošnje u širinu  $\Psi_D$  je prigušeno gibanje, visinskog rasta  $\Psi_h$  i dužine debla  $\Psi_{lk}$  je prisilno gibanje.



Slika 1. Dendrogram debljinske i visinske strukture za predominantno stablo  
 Figure 1 Dendrogram of diameter and height structure of predominant tree

Klasifikacijom strukturalnih oblika sastojina na *harmonično, ravnotežno, periodično, neperiodično i kaotično stanje* dobivamo disipativnu strukturu šume. Numerička klasifikacija strukture na stanja sastojina, kompleksnim jednadžbama debljinskog rasta je jednostavna. Dovoljno je poznavati promjer stabla  $d$  i njegovu starost kako bi iteracijama koeficijenta otpora rastu  $k$  uskladili brzinu modela s brzinom debljinskog rasta stabla ili sastojine.

## KOMPLEKSNI VEKTORSKI PROSTOR RASTA I PRIRASTA

### COMPLEX VECTOR SPACE OF GROWTH AND INCREMENT

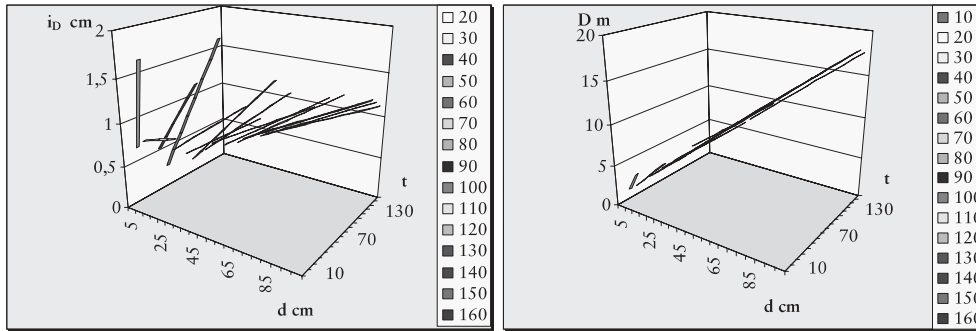
Kompleksni brojevi su skupovi koji predstavljaju moguća fizička stanja i tvore apstraktni kompleksni vektorski prostor rasta i prirasta. Integracijom kompleksnih brojeva dobiva se prirast, a daljnom integracijom rast.

Na Slici 2. prikazan je kompleksni vektorski prostor prirasnih nizova širina krošanja. Razvidna je dinamika prirasta, približno harmonična za najdeblja stabla, a kaotična za najtanja stabla u sastojini. Kompleksni vektorski prostor rasta krošnje u širinu na Slici 3. pokazuje potpunu korelaciju s prsnim promjerom. Optimalna širina krošnje hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.) u metrima može se izračunati iz linearnog odnosa:

$$D = (\delta + s\delta) / \delta + (s\delta / 2\delta) d = 1.363 + 0.181 d$$

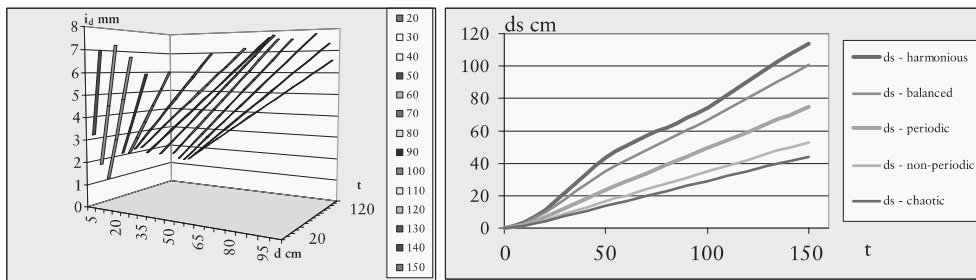
Praktična formula za procjenu optimalnog broja stabala  $N$  na jednom hektaru površine i procjenu obrasta sastojine.

Na Slici 4. prikazan je kompleksni vektorski prostor sastojinskog debljinskog prirasta hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.). Vidljiva je dinamika razvojnog tijeka



Slika 2. Kompleksni vektorski prostor prirasta širenja krošnje  
 Figure 2 Complex vector space of crown width increment

Slika 3. Kompleksni vektorski prostor rasta širenja krošnje  
 Figure 3 Complex vector space of crown width growth



Slika 4. Kompleksni vektorski prostor debljinskog prirasta  
 Figure 4 Complex vector space of diameter increment

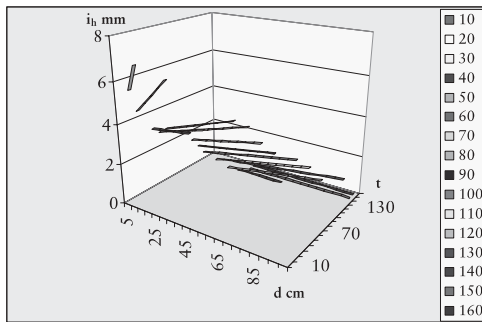
Slika 5. Razvojni tijek srednje sastojinskog stabla  $d_s$  za disipativna stanja sastojine  
 Figure 5 Developmental course of mean stand tree  $d_s$  for dissipative stand conditions

sastojinskog tečajnog godišnjeg debljinskog prirasta po dobnim razredima rasporena starosti deset godina. Intenzivan je pomak prirasnog niza tijekom prve kulminacije i ravnomjerniji tijekom druge kulminacije debljinskog prirasta. Uravnotežen za dominantna stabla, a kaotičan za podstojna i prigušena stabla. Prirasni nizovi po dobnim razredima dobivaju se istovremeno, kada iteracijama koeficijentom  $k$  utvrđujemo stanje sastojine. Iskoristimo li kompleksni vektorski prostor i linearnu relaciju kako je druga derivacija debljinskog rasta srednjeg sastojinskog stabla regresijska konstanta  $\Psi_{d_s} = a$ , pomoću debljinskog rasta  $d_s$  i njegovog prirasta  $i_{d_s}$  koeficijent regresije  $b$  izračuna se iz linearnog odnosa:

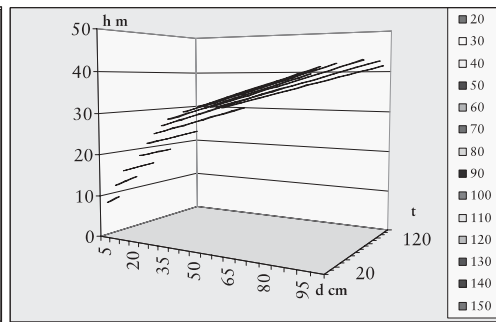
$$b = (i_{d_s} - \Psi_{d_s}) / d_s$$

Praktična formula za numeričku procjenu sastojinskog debljinskog prirasta bez bušenja stabala. Vrijeme potrebno za ovakav obračun mjeri se u sekundama. Manje vremena nego uzimanje izvrtka Preslerovim svrdlom od jednog stabla.

Na Slici 5. prikazan je razvojni tijek debljinskog rasta srednje sastojinskog stabla  $d_s$  hrasta lužnjaka sukladno stanjima vitalnosti. Odnos razvojnog tijeka srednje sastojinskog stabla u disipativnoj strukturi, prikazanog na Slici 5, model je praćenja potrajnog gospodarenja šumama, određivanja smjernica gospodarenja i ključni kriterij za određivanje ophodnje.



Slika 6. Kompleksni vektorski prostor visinskog prirasta  
 Figure 6 Complex vector space of height increment



Slika 7. Model prostorno-vremenskog razvoja visina  
 Figure 7 Model of spatial-temporal development of heights

Na Slici 6. vidljive su dvije kulminacije visinskog prirasta, prva prije dvadesete, a druga oko sedamdesete godine starosti sastojine. Na Slici 7. očigledan je brz rast sastojina do cca 70. godine, usporen do 120. godine starosti sastojine, a potom visinski rast prestaje i dolazi do inverzije visinskih krivulja. Na Slici 7. razvidna je zakrivljenost pete dimenzije. Ovakav razvojni tijek visinskih krivulja zakonitost je visinskog rasta i univerzalna je za sva vremena. Vrlo važna spoznaja za konstrukciju standardnih visinskih krivulja i jednoulaznih volumnih tablica. Odnos dužine debla i dužine krošnje strogo je matematički  $0.533 : 0.467$ , a određuje ga amplituda dužine debla  $A_{bd} = 4.669$  i amplituda dužine krošnje  $A_{lk} = 4.090$  što će reći *eigenrijednost*  $\check{e}$ .

## ZAKLJUČCI CONCLUSIONS

Priroda se pokorava relativno malom broju temeljnih zakona. Zakoni rasta i razvoja šuma su kompleksne jednadžbe, univerzalni alati za modeliranje multidimenzijske dinamike šuma.

Stabla su atraktori koji teže svom fenotipskom obliku. Imaju matematičku strukturu koja je određena univerzalnim konstantama i brojevima:  $\delta = 2.664$ , *eigenrijednošću*  $\check{e} = 4.669$ , konstantom  $\alpha \approx 1/137$  i Eulerovim brojem  $e = 2.718$ .

Kompleksne jednadžbe univerzalni su alati za numeričko utvrđivanje stanja vitalnosti stabla ili sastojine, prognozu razvoja sastojinske debljinske strukture, vi-

sinskog i volumnog prirasta, konstrukciju visinskih krivulja i jednoulaznih volumnih tablica, te konstrukciju prirasno-prihodnih tablica.

## LITERATURA REFERENCES

- Bezak, K. 1992. Prigušene oscilacije fenomena rasta i prirasta praćene Levakovićevim analitičkim izrazima, Zbornik o Antunu Levakoviću, HAZU, Centar za znanstveni rad Vinkovci, Vinkovci. Posebna izdanja 6. Str. 57-83.
- Bezak, K. 1995. The suppressed oscillations of the pedunculate oak (*Quercus robur* L.) stand diameter. XX IUFRO World Congress, Tampere, Finland. Danish Forest and Landscape Research Institute. Str. 7-17.
- Bezak, K. 2002. Prislino visinsko rastenje sastojina hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L), Rad. Šumar. inst. Jastrebar. 37 (2). Str. 185-201.
- Bezak, K. 2005. How do Forest Grow? XXII IUFRO World Congress, The International Forestry Review. Abstracts. Commonwealth Forestry Association. Brisbane. Str. 34.
- Stewart, I. 2003. Kocka li se bog? Nova matematika kaosa. Zagreb : Naknada Jesenski Turk. Str. 1-480.

## MODELLING MULTI-DIMENSIONAL FOREST DYNAMICS

### Summary

*The key to the perception of forest increment, growth and development lies in the logarithm spiral and the law of damped sinusoidal oscillations. Complex equations are a model of forest growth and development in space and time in six dimensions. The author obtained a quantitative, numerical prediction on the basis of purely qualitative models. Complex mapping provides long-term predictions of forest growth and development. In the context of complex growth dynamics, the pulsation coefficients of diameter growth, of height growth and of crown expansion are points at which the phenomenon of resonance might occur. A stand's condition and vitality may numerically be quantified with stand age, diameter of mean stand tree and resistance coefficient. The solutions to complex equations are complex numbers which show perfect harmony between the diameter and height structure of a tree. These are dendrograms in which vertical directions shows amplitudes or multi-dimensional vectors. Horizontal directions show space and time. Complex numbers are sets which represent possible physical states and form abstract complex vector space of growth and increment. Integration of complex numbers results in increment and further integration results in the growth of diameter and height structure.*

*Key words: modelling forests, growth and increment complex equations, complex numbers, complex vector space*

