math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

O zlatnom trokutu

konstrukcije ravnalom i šestarom   zlatni rez

Mirela Katić Žlepalo i Bojan Kovačić
Tehničko veleučilište u Zagrebu

Sažetak

U ovom članku definirat ćemo zlatni trokut, objasnit ćemo neka njegova svojstva i pokazati neke konstrukcije vezane uz zlatni trokut, a koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom.

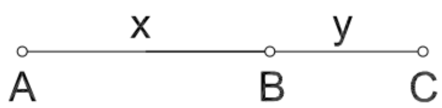
1 Uvod

Zlatni rez i zlatni pravokutnik su omiljena tema u matematici, odnosno geometriji, a i u umjetnosti i o njima je napisano zaista mnoštvo radova. Poznat je i pojam zlatnog trokuta, ali se on u literaturi nešto rjeđe spominje. Stoga ćemo u ovom radu definirati zlatni trokut, te navesti njegova najvažnija svojstva i načine konstrukcije.

2 O zlatnom rezu

Dužina ($\overline{AC}$) je podijeljena u **zlatnom rezu** ako je omjer većeg dijela dužine ($\overline{AB}$) prema manjem dijelu dužine ($\overline{BC}$) jednak omjeru cijele dužine ($\overline{AC}$) prema većem dijelu dužine ($\overline{AB}$) (vidjeti Sliku

1.).



Slika 1: Podjela dužine $\overline{AC}$ u zlatnom rezu

Zapišimo:

$$|\overline{AB}|:|\overline{BC}|=|\overline{AC}|:|\overline{AB}|.$$

Taj omjer obično se označava s φ pa koristeći oznake

$$|\overline{AB}|=x$$
$$|\overline{BC}|=y$$
$$|\overline{AC}|=x+y$$

zapisujemo:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}=\varphi$$

pri čemu smo omjere zapisali u obliku razlomaka. Primijetimo da zbog prirode samoga problema i gornjih oznaka vrijede nejednakosti $x>0$, $y>0$ i $\varphi>1$.

Iz jednakosti $\frac{x}{y}=\varphi$ slijedi

$$x = \varphi \cdot y.$$

Kad taj izraz uvrstimo u jednakost $\frac{x+y}{x} = \varphi$, dobivamo:

$$\frac{\varphi y+y}{\varphi y} = \varphi$$
$$\frac{y(\varphi+1)}{\varphi y} = \varphi$$

pa zbog $y > 0$ slijedi:

$$\frac{\varphi+1}{\varphi} = \varphi | \cdot \varphi$$
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Sva rješenja ove kvadratne jednadžbe su:

$$\varphi_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ i } \varphi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Budući da mora vrijediti nejednakost $\varphi > 1$, rješenje φ_1 odbacujemo. Rješenje $\varphi = \varphi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875...$ nazivamo **zlatni broj**.

Odavde slijedi da je omjer manjeg dijela dužine ($\overline{BC}$) prema većem dijelu dužine ($\overline{AB}$) jednak

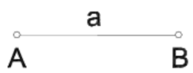
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803398875...$$

3 Dvije osnovne konstrukcije vezane uz zlatni rez

Konstrukcije koje ćemo ovdje pokazati lako se mogu izvesti ravnalom i šestarom. Navodimo dva problemska zadatka i njihova rješenja.

Zadatak 1.

Zadana je dužina $\overline{AB}$ duljine *a* (vidjeti Sliku 2.). Konstruirajte dužinu duljine *b* tako da omjer *a*:*b* bude jednak zlatnom broju.



Slika 2: Zadana dužina $\overline{AB}$ duljine *a*

Rješenje: Iz bilo koje krajnje točke dužine (bez smanjenja općenitosti ovdje ćemo izabrati točku *B*), uzdignemo okomicu duljine *a*. Na taj način dobivamo točku *R*. Odredimo polovište *P* dužine $\overline{AB}$. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki *P* i polumjerom $r=\overline{PR}$. Tim kružnim lukom presiječemo pravac *AB*. Tako dobivamo točku *C* (vidjeti Sliku 3.). Dužina $\overline{BC}$ je tražena dužina.

Napomena 1. Primijetimo da točka *C* ne može pripadati dužini $\overline{AB}$. Uočimo da prema konstrukciji vrijede jednakosti

$$|\overline{PB}|=\frac{a}{2},$$
$$|\overline{BR}|=a.$$

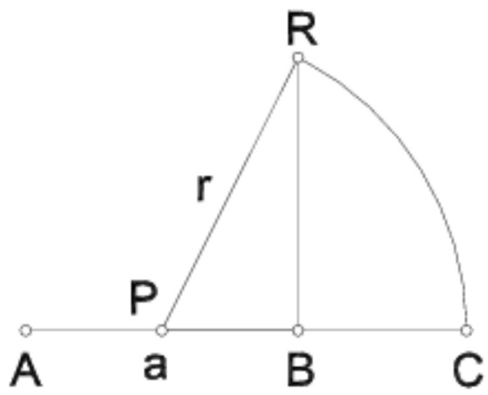
Opet prema konstrukciji, trokut $\triangle PBR$ je pravokutan trokut kojemu je pravi kut kod vrha *B*. Primjenom Pitagorina poučka izračunamo duljinu *r* njegove hipotenuze $\overline{PR}$:

$$r^2=|\overline{PB}|^2+|\overline{BR}|^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\frac{5}{4}a^2.$$

Odatle je $r = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Tako slijedi:

$$|\overline{PC}|=r=\frac{\sqrt{5}}{2}a > \frac{1}{2}a=|\overline{AP}|=|\overline{BP}|.$$

Dakle, $C\notin\overline{AB}$, pa zbog toga u konstrukciji koristimo pravac AB.



Slika 3: Konstrukcija iz Zadatka 1.

Dokaz konstrukcije: U Napomeni 1. pokazali smo da vrijedi jednakost:

$$r = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Duljinu dužine $\overline{BC}$ dobivamo kao razliku duljina dužina $\overline{PC}$ i $\overline{PB}$:

$$|\overline{BC}|=|\overline{PC}|-|\overline{PB}|=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Stoga je omjer duljina $|\overline{AB}|$ i $|\overline{BC}|$ jednak:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}=\frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi,$$

što je i trebalo pokazati.

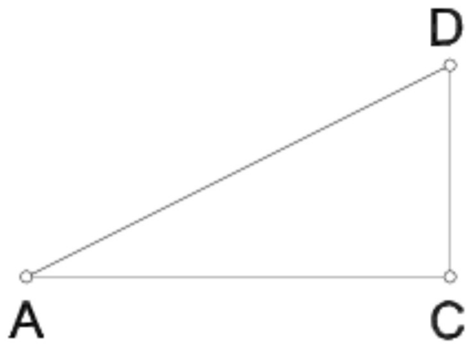
Q.E.D.

Za konstrukcije zlatnoga trokuta koje ćemo pokazati dovoljna je konstrukcija opisana u rješenju Zadatka 1. Radi potpunosti, u Zadatku 2. izložit ćemo još jednu konstrukciju.

Zadatak 2. Zadanu dužinu $\overline{AC}$ (vidjeti Sliku 4.) podijelite u zlatnom rezu.

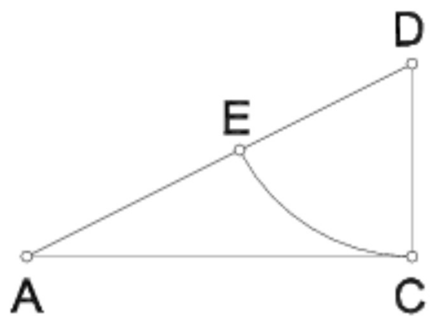
Slika 4: Zadana dužina $\overline{AC}$

Rješenje: Neka je $d :=|\overline{AC}|$. Iz točke C uzdignemo okomicu duljine $\frac{d}{2}$. Tako dobivenu točku označimo s D. Spojimo točku D s točkom A (vidjeti Sliku 5).



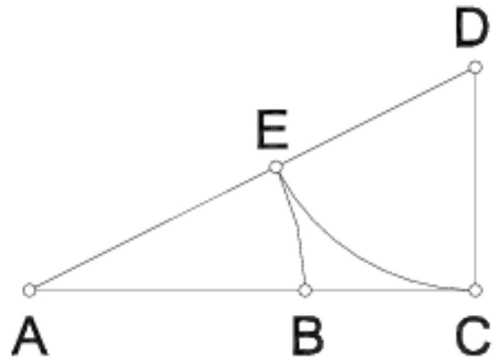
Slika 5: Početak konstrukcije

Konstruiramo kružni luk sa središtem u D i polumjerom $\frac{d}{2}$. Njime presiječemo dužinu $\overline{AD}$. Tako dobivenu točku označimo s E (vidjeti Sliku 6.).



Slika 6: Nastavak konstrukcije

Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki A i polumjerom $|\overline{AE}|$. Tim kružnim lukom presiječemo dužinu $\overline{AC}$. Tako dobivenu točku označimo s B (vidjeti Sliku 7.).



Slika 7: Dužina podijeljena u zlatnom rezu

Točka B je tražena točka, tj. točka B dijeli dužinu $\overline{AC}$ u zlatnom rezu.

Dokaz konstrukcije: Primjenom Pitagorina poučka na trokut $\triangle ACD$ dobijemo

$$|\overline{AD}|=\sqrt{|\overline{AC}|^2+|\overline{CD}|^2}=\sqrt{d^2+(\frac{d}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}d.$$

Zbog toga je

$$|\overline{AE}|=|\overline{AD}|-|\overline{DE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}d-\frac{1}{2}d=\frac{\sqrt{5}-1}{2}d.$$

Prema konstrukciji je

$$|\overline{AB}|=|\overline{AE}|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}d,$$

pa je

$$|\overline{BC}| = |\overline{AC}| - |\overline{AB}| = d - \frac{\sqrt{5}-1}{2} d = \frac{3-\sqrt{5}}{2} d.$$

Preostaje izračunati ili omjer duljina $|\overline{AB}|$ i $|\overline{BC}|$:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} d}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} d} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

ili omjer duljina $|\overline{AC}|$ i $|\overline{AB}|$:

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{d}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} d} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

što je i trebalo pokazati. Q.E.D.

4 O zlatnom pravokutniku

Zlatni pravokutnik je takav pravokutnik kojemu je omjer duljina stranica a i b jednak zlatnom broju, tj. $a : b = \varphi$. U umjetnosti se smatra pravokutnikom koji ima oku najugodnije dimenzije, pa su mnoge slike naslikane upravo u dimenzijama zlatnog pravokutnika.

Koristeći konstrukciju opisanu u rješenju Zadatka 1. vrlo je jednostavno riješiti sljedeće zadatke.

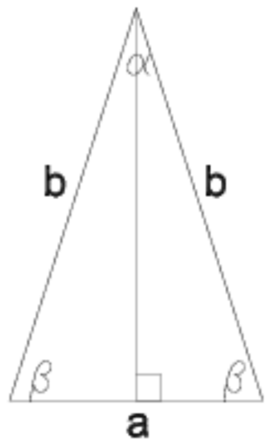
Zadatak 3. Konstruirajte (kraću) stranicu b zlatnoga pravokutnika ako je zadana (dulja) stranica a toga pravokutnika.

Zadatak 4. Konstruirajte (dulju) stranicu a zlatnoga pravokutnika ako je zadana (kraća) stranica b toga pravokutnika.

Detalje prepuštamo čitatelju za vježbu.

5 O zlatnom trokutu

Zlatni trokut je jednakokračan trokut kojemu je omjer duljine kraka (b) i duljine osnovice (a) jednak zlatnom broju φ (vidjeti Sliku 8.).



Slika 8: Zlatni trokut

Najprije ćemo dokazati da su svi zlatni trokuti slični. U tu svrhu treba nam jedna lema.

Lema 1. $\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Dokaz: Označimo $\alpha = \frac{\pi}{10}$. Tada je očito $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Podsjetimo da za svaki $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ vrijede nejednakosti:

$$0 < \sin x < 1,$$
$$0 < \cos x < 1.$$

Posebno, i za $x = \alpha$ vrijede nejednakosti:

$$0 < \sin \alpha < 1,$$
$$0 < \cos \alpha < 1.$$

Ako je $\alpha = \frac{\pi}{10}$, onda je $5\alpha = \frac{\pi}{2}$. Iz potonje jednakosti slijedi redom:

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$
$$\cos(3\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$$
$$\cos(3\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2\alpha) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \sin(2\alpha)$$
$$\cos(3\alpha) = \sin(2\alpha).$$

Poznato je da vrijede trigonometrijski identiteti (dokaze vidjeti npr. u [2]):

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Uvrštavanjem tih jednakosti u jednakost $\cos(3\alpha) = \sin(2\alpha)$ dobije se:

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Zbog nejednakosti $\cos\alpha > 0$, gornju jednakost smijemo podijeliti s $\cos\alpha$. Dobijemo:

$$4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha - 3 = 0.$$

Primjenom osnovnog trigonometrijskog identiteta $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ gornju jednakost možemo transformirati u ekvivalentnu jednakost:

$$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0.$$

Zamjenom $t = \sin\alpha$ dobiva se kvadratna jednadžba:

$$4t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Sva rješenja te jednadžbe su:

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Zbog nejednakosti $\sin\alpha > 0$ u obzir dolaze samo strogo pozitivna rješenja. Lako se vidi da vrijedi nejednakost $t_2 < 0$, pa to rješenje odbacujemo. Zbog toga preostaje

$$t = t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

odnosno

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

čime je lema dokazana. Q.E.D.

Tvrdnju da su svi zlatni trokuti slični dokazat ćemo tako da izračunamo mjere kutova bilo kojega zlatnoga trokuta. Preciznije, dokazat ćemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1. Mjere kutova bilo kojega zlatnoga trokuta su 36°, 72° i 72°.

Dokaz: Prema pretpostavci, omjer brojeva a i b je zlatni broj, tj. vrijedi jednakost:

$$a : b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Uz oznake sa Slike 8. slijedi:

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Iz Leme 1. slijedi:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{10},$$

odnosno $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad.= 36°. Sada lako izračunamo mjeru preostaloga kuta trokuta:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \frac{\pi}{5}) = \frac{2}{5}\pi \, \text{rad.} = 72^\circ,$$

što je i trebalo pokazati. Q.E.D.

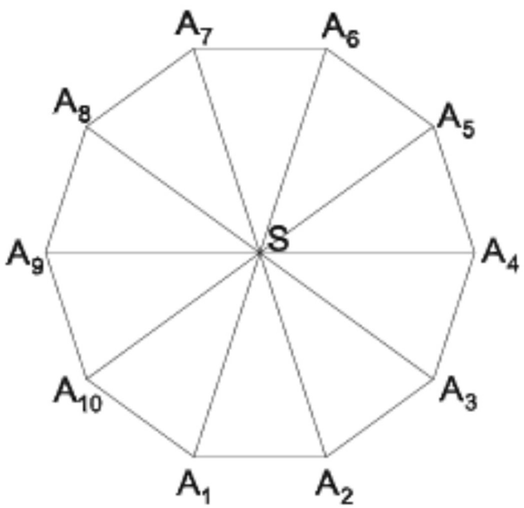
Korolar 1. Svi zlatni trokuti su slični.

Dokaz: Tvrdnja slijedi izravno iz Propozicije 1. i poučka K-K-K o sličnosti trokuta. (Svi poučci o sličnosti trokuta mogu se naći npr. u [1].) Q.E.D.

Zlatni trokut nalazimo kao karakterističan trokut unutar pravilnog deseterokuta (vidjeti Sliku 9.). Naime, mjera središnjega kuta pravilnoga deseterokuta je $\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ radijana, pa primjenom Propozicije 1. zaključujemo da je taj trokut zlatni trokut. Odatle izravno slijedi

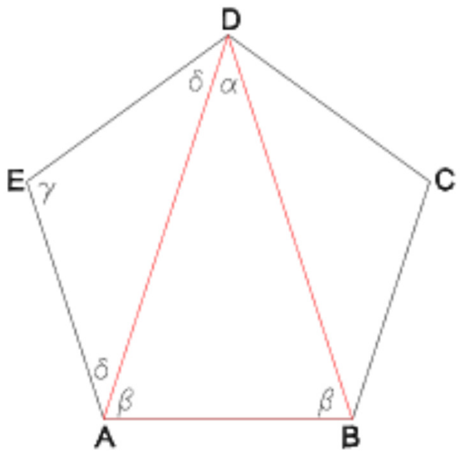
Propozicija 2. Omjer polumjera pravilnom deseterokutu opisane kružnice i duljine stranice toga deseterokuta jednak je zlatnom broju.

Korolar 2. Neka je a duljina stranice pravilnoga deseterokuta. Tada je polumjer tom deseterokutu opisane kružnice $R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.



Slika 9: Zlatni trokut u pravilnom deseterokutu

Zlatni trokut također nalazimo i unutar pravilnog peterokuta (vidjeti Sliku 10.).



Slika 10: Zlatni trokut u pravilnom peterokutu

Propozicija 3. Crveno označeni trokut sa Slike 10. je zlatni trokut.

Dokaz: Zbog Propozicije 1. dovoljno je dokazati da je $\beta = 72^\circ$. Zbroj svih unutrašnjih kutova pravilnog peterokuta jednak je

$$S = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ.$$

Jedan od tih unutrašnjih kutova je i kut γ. Njegova mjera je $\gamma = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Zbog toga je:

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ.$$

Uočimo da kutovi β i δ zajedno daju još jedan unutrašnji kut peterokuta. To znači da za njihove mjere mora vrijediti jednakost:

$$\beta+\delta=108^{\circ}.$$

Zbog $\delta=36^{\circ}$ odatle odmah slijedi $\beta=72^{\circ}$, što smo i željeli dokazati. Q.E.D.

6 Dvije osnovne konstrukcije zlatnoga trokuta

Dvije su osnovne konstrukcije zlatnoga trokuta: -konstruirati zlatni trokut kojemu je zadana osnovica duljine a;
-konstruirati zlatni trokut kojemu je zadan krak duljine b.

Obje konstrukcije možemo provesti primjenom konstrukcije opisane u rješenju Zadatka 1. Precizirajmo to u obliku sljedećih dvaju zadataka.

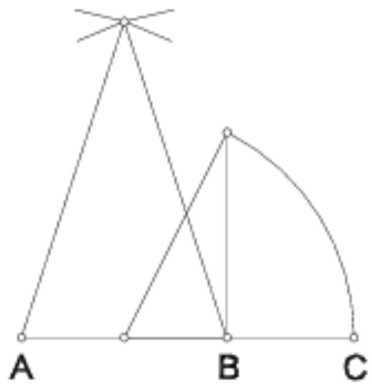
Zadatak 5. Konstruirajte zlatni trokut kojemu je zadana osnovica $\overline{AB}$.

Rješenje: Konstrukcijom opisanom u rješenju Zadatka 1. konstruiramo točku C takvu da je $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}=\varphi$ (vidjeti Sliku 3.). Tada je duljina dužine $\overline{AC}$ jednaka duljini kraka zlatnoga trokuta. Doista, iz definicije zlatnoga reza izravno slijedi da ako je $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}=\varphi$, onda je i

$$\frac{|\overline{AB}|+|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}=\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}=\varphi.$$

Preostaje dovršiti konstrukciju. Konstruiramo kružnice sa središtima u točkama A i B i polumjerom $r=|\overline{AC}|$. Te kružnice se sijeku u trećem vrhu zlatnoga trokuta (vidjeti Sliku 11.).

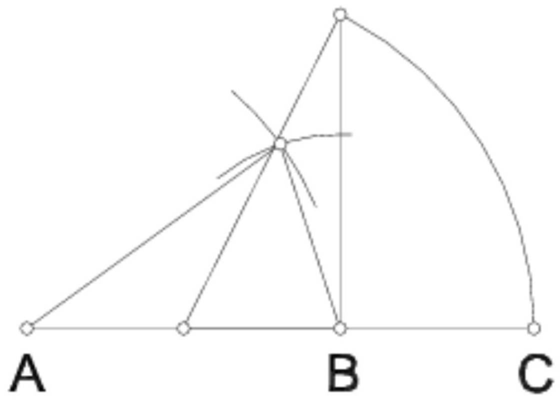
Napomena 2. Iako se gore opisanom konstrukcijom dobivaju dvije točke kao treći vrh zlatnoga trokuta, pa samim tim i dva zlatna trokuta, primjenom poučka S - S - S zaključujemo da su ti trokuti sukladni. Zbog toga Zadatak 5. ima jedinstveno rješenje.



Slika 11: Konstrukcija zlatnog trokuta iz rješenja Zadatka 5.

Zadatak 6. Konstruirajte zlatni trokut kojemu je zadan krak $\overline{AB}$.

Rješenje: Konstrukcijom opisanom u rješenju Zadatka 1. konstruiramo točku C takvu da je $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \varphi$. Tada je duljina dužine $\overline{BC}$ jednaka duljini osnovice zlatnoga trokuta (vidjeti Sliku 12.). Ispravnost ovoga zaključka proizlazi izravno iz rezultata Zadatka 1.



Slika 12: Konstrukcija zlatnog trokuta iz rješenja Zadatka 6.

Preostaje dovršiti konstrukciju. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je A zajednički vrh obaju krakova zlatnoga trokuta. Konstruiramo kružnicu sa središtem u točki A i polumjerom $r :=|\overline{AB}|$. Potom konstruiramo kružnicu sa središtem u točki B i polumjerom $r_1 :=|\overline{BC}|$. Sjecište tih kružnica je preostali vrh C zlatnoga trokuta.

Napomena 3. Analogno kao i u rješenju Zadatka 5., gore opisanom konstrukcijom dobivaju se dvije točke kao treći vrh zlatnoga trokuta, pa samim tim i dva zlatna trokuta. Primjenom poučka S - S - S zaključujemo da su ti trokuti sukladni. (Sve poučke o sukladnosti dvaju trokuta vidjeti npr. u [1].) Zbog toga Zadatak 6. ima jedinstveno rješenje.

Napomena 4. Konstrukcija opisana u rješenju Zadatka 1. primjenjuje se i u konstrukciji pravilnoga peterokuta, odnosno pravilnoga deseterokuta upisanoga u kružnicu polumjera r. Zainteresiranoga čitatelja upućujemo na [1].

7 Zlatni rez i zlatni trokut - konstrukcije u GeoGebri

GeoGebra je besplatan program pogodan za mnoge konstrukcije i često korišten u nastavi matematike, a posebno u nastavi geometrije. Konstrukcije koje su opisane u ovom članku jednostavno je izvesti u GeoGebri. Dva primjera koja su izradili autori članka dostupna su na Internetu zajedno s uputama namijenjenima korisnicima, i to:

1)Primjer za zlatni rez, odnosno konstrukciju opisanu u Zadatku 1:
https://www.geogebra.org/m/Z2TuZdcs

2)Primjer za zlatni trokut:
https://www.geogebra.org/m/wfgxb4C4

8 Zaključak

O zlatnom rezu i njegovim različitim primjenama do danas je napisano mnoštvo znanstvenih i stručnih radova. U ovom smo članku izložili pregled osnovnih svojstava zlatnoga trokuta, njegovih osnovnih konstrukcija i njegove veze s nekim pravilnim poligonima.

Unatoč svim nastojanjima popularizacije matematike, u našoj javnosti još uvijek prevladavaju tradicionalni stereotipi o matematici kao nerazumljivoj, vrlo teškoj i neprimjenjivoj znanstvenoj disciplini. Pritom se primjene matematičkih struktura u umjetnosti i tehnici u našim obrazovnim programima gotovo uopće ne spominju, što je izravna posljedica potpuno neopravdanoga zanemarivanja geometrije kao matematičke discipline. Uvjereni smo da bi obrada tema poput zlatnoga pravokutnika i zlatnoga trokuta (uključujući i njihove konstrukcije) u redovnoj i izbornoj nastavi matematike u našim osnovnim i srednjim školama, ali i nastavi matematičkih predmeta na veleučilištima i samostalnim visokim školama u kojima postoje studiji tehničkih znanosti, dodatno doprinijela zanimljivosti nastave i opovrgavanju gore spomenutih stereotipa.

Bibliografija

[1] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika* 1, školska knjiga, Zagreb, 2004.

[2] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika* 2, školska knjiga, Zagreb, 1994.

[3] E. W. Weisstein: *Golden Triangle*, (javno dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html, 25.9.2016.)

ISSN 1334-6083