Osječki matematički list 16 (2016), 157-167

Mohr–Mascheronijeve konstrukcije

Zdenka Kolar-Begović*, Antonija Milišić†

Sažetak

Kroz povijest mnogi su matematičari restringirali skup instrumenata koji se koristi pri izvođenju konstrukcija. U ovom radu je razmatrana upotreba samo šestara pri izvođenju konstrukcija. Pokazano je da je svaka konstrukcija koja je izvodiva ravnalom i šestarom izvodiva samo šestarom.

Ključne riječi: *Mohr-Mascheronijeve konstrukcije, inverzija*

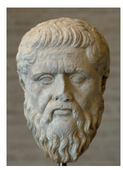
Mohr-Mascheroni constructions

Abstract

Through history, mathematicians have taken delight in limiting the set of instruments used in effecting geometric constructions. In this paper, we consider geometric constructions effected only by compass. It is shown that any construction possible by means of straightedge and compass is also possible by using compass alone.

Keywords: *Mohhr–Mascheroni constructions, inversion*

1 Iz povijesti Mohr– Mascheronijevih konstrukcija



Platon (427. pr. Kr.–347. pr. Kr.) grčki filozof

Platon je zaslužan za ograničavanje skupa instrumenata koji se koriste pri izvođenju geometrijskih konstrukcija. On je bio zagovornik upotrebe samo šestara i ravnala bez oznake mjerne jedinice. Ovo ograničenje je dovelo

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: zkolar@mathos.hr

†Diplomirana studentica Odjela za matematiku, email: amilisic@mathos.hr

do nekih od najpoznatijih rasprava u geometriji, o problemu kvadrature kruga, trisekcije kuta i duplikacije kocke.

Leonardo da Vinci (1452.–1519.) talijanski slikar, arhitekt, izumitelj, glazbenik, kipar, mislilac i matematičar

I neki su matematičari kroz povijest restringirali skup instrumenata koje koriste za izvođenje konstrukcija. Prvi poznati matematičar koji je izvršio restrikciju instrumenata za izvođenje konstrukcija je perzijski matematičar Abul Wefa[1]. Njegovo djelo *Kitab al-Hindusa* sadrži veliki broj geometrijskih problema vezanih za fundamentalne konstrukcije "fiksiranim šestarom", šestarom koji ne mijenja svoj polumjer. Neke od temeljnih konstrukcija koje je izveo Wefa koristeći ravnalo i šestar određenog polumjera su konstrukcija simetrale dužine, konstrukcija paralele kroz zadanu točku sa zadanim pravcem, konstrukcija pravilnog peterokuta kome je zadana jedna stranica. Takvim konstrukcijama bavio se Leonardo da Vinci te brojni ruski matematičari.

Jean–Victor Poncelet (1788.–1867.), francuski vojni inženjer i matematičar

Poncelet i Steiner su dokazali da su sve konstrukcije koje su izvodive ravnalom i šestarom izvodive upotrebom ravnala i fiksiranog šestara proizvoljno određenog polumjera (dovoljan je samo centar i kružni luk).

Jacob Steiner (1796.–1863.), švicarski matematičar

Konstrukcijama samo šestarom bavio se danski matematičar George Mohr[2] te je u svojoj knjizi *Euclides Danicus*, izdanoj 1672. godine, dokazao da su sve euklidske konstrukcije izvodive samo upotrebom šestara. Njegovo djelo bilo je izgubljeno tako da je talijanski geometričar Mascheroni dokazao taj isti teorem ne poznavajući Mohrove rezultate i objavio ga 1797. godine u djelu *Geometria del compasso*. Izgubljeno djelo Georga Mohra pronašao je u antikvarijatu u Kopenhagenu danski student. Pokazao ga je svom profesoru matematike, Johannesu Hjelmslevu[3], koji je djelo preveo na njemački jezik i objavio ga 1928. godine u Kopenhagenu.

2 Mohr–Mascheronijev teorem

Lorenzo Mascheroni (1750.–1800.) talijanski matematičar

U ovom poglavlju ćemo dokazati da se šestarom mogu izvesti sve euklidske konstrukcije, tj. konstrukcije za čije izvođenje se koristi šestar i ravnalo. Prirodno se nameće pitanje: "Kako se to može dokazati da su sve euklidske konstrukcije izvodive samo pomoću šestara?" Broj konstrukcija u geometriji je beskonačan, pa se sigurno ne može dokaz provesti rješavanjem svakog problema zasebno, korištenjem samo šestara. Međutim, sve euklidske konstrukcije se mogu svesti na sljedeće fundamentalne konstrukcije:

[1] Abul Wefa ibn Mohammad ibn Yahya ibn Ismail Buzjani (940.–998.), perzijski matematičar i astronom

[2] George Mohr (1640.–1697.), danski matematičar

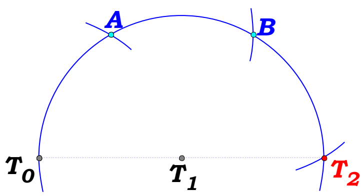
[3] Johannes Trolle Hjelmslev (1873.–1950.), danski matematičar

FK1) konstrukcija spojnice dviju točaka,
FK2) konstrukcija kružnice zadanog središta i zadanog polumjera,
FK3) određivanje sjecišta dviju kružnica,
FK4) određivanje sjecište pravca i kružnice,
FK5) određivanje sjecišta dvaju pravaca.

Dokaz izvodivosti navedenih konstrukciju samo šestarom napravit ćemo najprije primjenom inverzije.
Napomenimo, da je konstrukcija spojnice dviju točaka nemoguće izvesti šestarom. Smatrat ćemo da je pravac konstruiran, ako su mu nađene dvije točke. Pokazat ćemo da je moguće korištenjem samo šestara konstruirati točke tog pravca.

Najprije navedimo sljedeće konstrukcije.

Zadatak 2.1. Za zadanu dužinu $\overline{T_0T_1}$ na pravcu T_0T_1 konstruirati točku T_n tako da vrijedi $|T_0T_n| = n \cdot |T_0T_1|$, $n \in \mathbf{N}$.

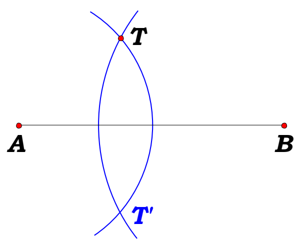


Slika 1:

Rješenje. Konstruiramo kružnicu $k(T_1, |T_1T_0|)$ i zatim na njoj konstruiramo točke A, B i T_2 tako da je $|T_0A| = |AB| = |BT_2| = |T_0T_1|$.
Tada je $|T_0T_2| = 2 \cdot |T_0T_1|$ (vidi sliku 1). Dalje se konstruira $T_3, T_4, \ldots$ ◄

Zadatak 2.2. Konstruirati točku T' simetričnu danoj točki T s obzirom na pravac kroz dane točke A i B.

Rješenje.



Slika 2:

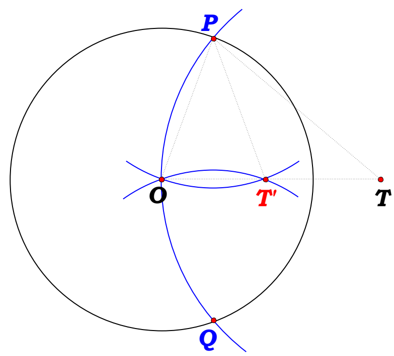
Točka T' je drugo sjecište kružnica $k(A, |AT|)$ i $k(B, |BT|)$ (slika 2). ◀

Budući da je metoda inverzije najpogodnija za rješavanje problema Mohr–Mascheronijevih konstrukcija, definirat ćemo to preslikavanje.

Definicija 2.1. Neka je M ravnina i $O \in M$ čvrsta točka, a $R > 0$ zadani pozitivan realan broj. Prelikavanje $f : M \setminus \{O\} \to M \setminus \{O\}$ koje točki T pridružuje točku T' zovemo inverzija s centrom O i radijusom R ako vrijedi:
i) O, T i T' su kolinearne točke,
ii) $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.
Kružnicu $k(O, R)$ zovemo kružnica inverzije.

Zadatak 2.3. Konstruirati slike točke pri inverziji zadanoj kružnicom inverzije $k(O, R)$.

Rješenje. Razmotrimo ćemo, s obzirom na udaljenost točke do središta kružnice inverzije, konstrukciju slike točke pri zadanoj inverziji.

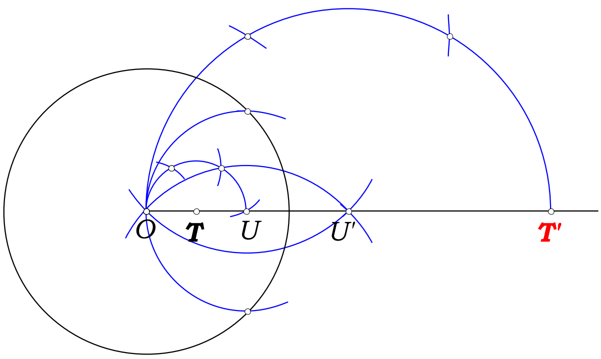


Slika 3:

Slučaj a) $|OT| = d > \dfrac{R}{2}$. Kružnica $(T, |TO|)$ siječe kružnicu inverzije $k(O, R)$ u dvije točke P, Q, a kružnice $k(P, R)$, $k(Q, R)$ sijeku se u točkama O, T'. Iz sličnosti jednakokračnih trokuta OTP, OPT' dobivamo $|OT| : |OP| = |OP| : |OT'|$, tj. $|OT| \cdot |OT'| = R^2$ pa je dakle T' tražena točka (slika 3).

Slučaj b) $|OT| = d = \dfrac{R}{2}$. Za traženu točku T' je $|OT'| = 2R$, tj. $|OT'| = 4 \cdot |OT|$, pa se konstrukcija svodi na zadatak 2.1.

Slučaj c) $|OT| = d < \frac{R}{2}$. Sada je $|OT'| = d' = \frac{R^2}{d}$. Na polupravcu OT konstruiramo točku U tako da je $|OU| = n \cdot d$ (zadatak 2.1), gdje je $n \in N$ broj takav da je $nd > \frac{R}{2}$ (slika 4). Neka je U' inverzna slika od U (slučaj a)) i neka je točka T' takva da je $|OT'| = n \cdot |OU'|$ (zadatak 2.1). Tada imamo $d' = |OT'| = n \cdot |OU'| = n \cdot \frac{R^2}{|OU|} = n \cdot \frac{R^2}{nd} = \frac{R^2}{d}$, tj. T' je tražena točka.



Slika 4:

◀

Može se dokazati da vrijede sljedeće tvrdnje (vidi [7]).

1. Pravac koji prolazi centrom inverzije preslikava se u samog sebe.

2. Pravac koji ne prolazi centrom inverzije preslikava se u kružnicu koja prolazi centrom inverzije.

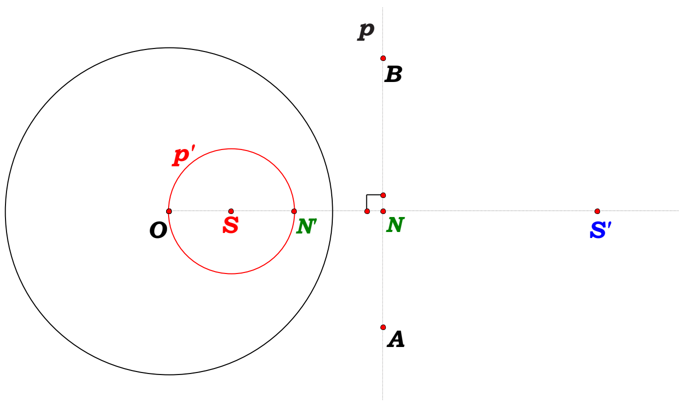
3. Kružnica koja prolazi centrom inverzije preslikava se u pravac.

4. Kružnica koja ne prolazi centrom inverzije preslikava se u kružnicu.

Rješavanjem niza zadataka pokazat ćemo da se korištenjem samo šestara mogu naći slike pravca i kružnice pri inverziji.

Zadatak 2.4. Konstruirati sliku pravca određenog točkama A, B, koji ne prolazi točkom O, pri inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, R)$.

Rješenje. Slika pravca p je kružnica p' čiji je promjer $\overline{ON'}$, gdje je N' inverzna slika nožišta N okomice iz O na p. Zato je središte S kružnice p' inverzna slika točke S' simetrične točki O s obzirom na pravac AB. Konstruiramo najprije točku S' (zadatak 2.2), a zatim točku S (zadatak 2.3).



Slika 5:

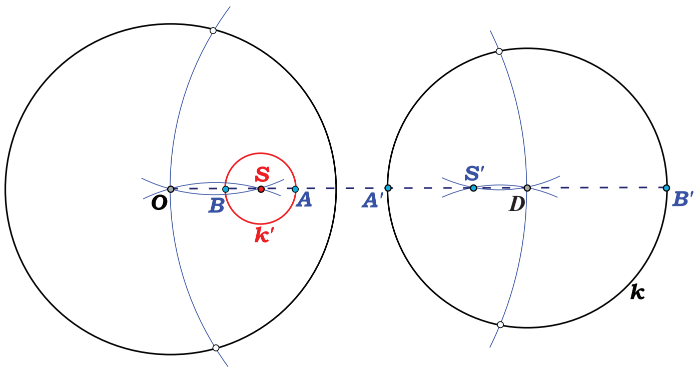
Tražena kružnica p' je kružnica $k(S, |SO|)$ (slika 5). ◀

Zadatak 2.5. Konstruirati sliku kružnice k, koja prolazi točkom O, pri inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, R)$.

Rješenje. Slika k' je pravac. Prema zadatku 2.3 konstruiramo slike dviju točaka na k. k' je spojnica tih točaka. Ako k siječe kružnicu $k(O, R)$, tada je k' spojnica tih sjecišta. ◀

Zadatak 2.6. Konstruirati sliku kružnice k, koja ne prolazi točkom O, pri inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, R)$.

Rješenje. Neka je (D, ρ) dana kružnica k i $|OD| = d$. Konstruiramo sliku S' točke O pri inverziji s obzirom na kružnicu k i zatim sliku S točke S' pri inverziji s obzirom na kružnicu $k(O, R)$. Neka je k' slika od k pri inverziji s obzirom na $k(O, R)$.



Slika 6:

Ako pravac OD siječe k u A', B', a k' u A, B, tada su A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka pri inverziji na $k(O, R)$ i $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ su promjeri od k', k. Imamo redom

$$|OA| = \frac{R^2}{|OA'|} = \frac{R^2}{d-\rho}, \quad |OB| = \frac{R^2}{|OB'|} = \frac{R^2}{d+\rho}, \quad |DS'| = \frac{\rho^2}{|DO|} = \frac{\rho^2}{d},$$

$$|OS'| = |OD| - |DS'| = d - \frac{\rho^2}{d} = \frac{d^2-\rho^2}{d}, \quad |OS| = \frac{R^2}{|OS'|} = \frac{R^2 d}{d^2-\rho^2},$$

pa je

$$|OA| + |OB| = \frac{R^2}{d-\rho} + \frac{R^2}{d+\rho} = \frac{R^2(d+\rho+d-\rho)}{d^2-\rho^2} = 2\frac{R^2 d}{d^2-\rho^2} = 2|OS|,$$

tj. S je polovište dužine $\overline{AB}$. Dakle, S je središte tražene kružnice k', a konstruiramo S dvostrukom primjenom zadatka 2.3. Samu kružnicu k' dobivamo tako da konstruiramo sliku bilo koje točke od k (opet zadatak 2.3) pri inverziji s obzirom na $k(O, R)$. ◀

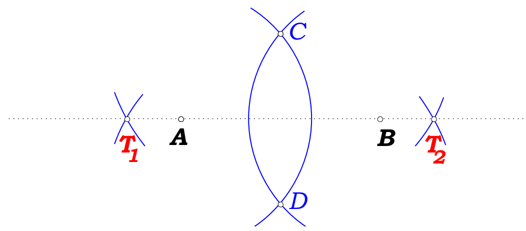
Na temelju prethodno riješenih zadataka jasno je da se svaki zadatak, za čije rješavanje je korišteno samo ravnalo i šestar, može riješiti korištenjem samo šestara. Rješenje zadatka svodi se na konstrukciju pravaca i kružnica korištenjem inverzije čiji centar nije ni na jednom od pravaca i ni na jednoj od kružnica u konstrukciji. Uz tu inverziju konstrukcija se svodi na konstrukciju u kojoj konfiguriraju samo kružnice.

Korištenje ovog načina rješavanja često je dosta zahtjevno pa ćemo spomenuti još jedan način rješavanja zadataka, pomoću kojeg ćemo i dokazati Mohr–Mascheronijev teorem.

Teorem 2.1 (Mohr–Masceronijev teorem). Sve konstrukcije koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom mogu se izvesti i samo šestarom.

Konstrukcije ravnalom i šestarom svode se na spomenute fundamentalne konstrukcije FK1)–FK5). Potrebno je dokazati da su ove fundamentalne konstrukcije izvodive samo šestarom.

FK1) Konstrukcija točaka pravca zadanog točkama A i B.



Slika 7:

Neka su C i D sjecišta kružnica $k(A,d)$ i $k(B,d)$, gdje je $d > \dfrac{|AB|}{2}$. Neka se kružnice $k(C,s)$ i $k(D,s)$, gdje je $s > d(C,AB)$, sijeku u točkama T_1 i T_2 (slika 7). Jer su C i D simetrične s obzirom na pravac AB, to je pravac AB simetrala dužine $\overline{CD}$, tj. skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od C i D, pa su T_1 i T_2 na pravcu AB.

Konstrukcije FK2) i FK3) su očite.

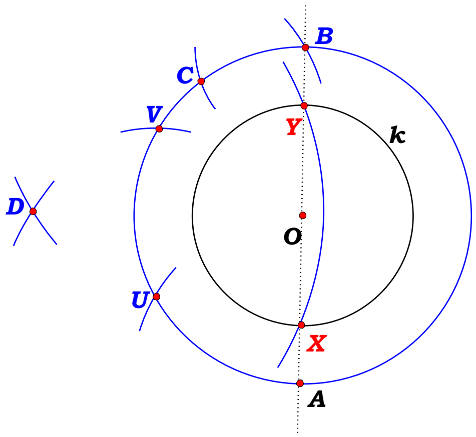
FK4) Konstrukcija sjecišta zadane kružnice $k(O,r)$ i pravca zadanog točkama A i B.
Ovu konstrukciju ćemo dobiti rješavanjem sljedeća dva zadatka.

Zadatak 2.7. Dana je kružnica $k(O,r)$ i pravac AB, koji ne prolazi kroz O. Konstruirati sjecište od k i AB.

Rješenje. Prema zadatku 2.2 nađemo točku O' simetričnu točki O s obzirom na pravac AB. Tada je $k'(O',r)$ kružnica simetrična sa k s obzirom na AB. Kružnice k, k' sijeku se u traženim sjecištima od k i AB. ◀

Zadatak 2.8. Dana je kružnica $k(O,r)$ i pravac OA. Konstruirati sjecište od k i OA.

Rješenje. Neka je $|OA| = a$ i neka su X, Y tražena sjecišta. Konstruiramo kružnicu $k(O,a)$ i na njoj prema zadatku 2.1 konstruiramo točku B, tako da je $\overline{AB}$ promjer te kružnice (pomoću točaka U, V). Na tu kružnicu nanosimo $|BC| = r$. Tada je $|AC| = \sqrt{4a^2 - r^2}$, jer je $AC \perp BC$. Konstruiramo kružnice $(A, |AC|)$, $(B, |AC|)$ i njihovo sjecište D. Kružnica $(D, |AV|)$ siječe k u traženim točkama X i Y.



Slika 8:

Kako je točka D na simetrali dužine $\overline{AB}$, to je OAD pravokutan trokut odakle slijedi

$$|OD|^2 = |AD|^2 - |OA|^2 = |AC|^2 - |OA|^2 = 4a^2 - r^2 - a^2 = 3a^2 - r^2.$$

Jer je $|DX| = |AV| = a\sqrt{3}$ to vrijedi

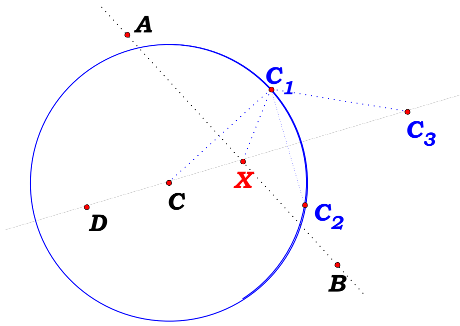
$$|OD|^2 + |OX|^2 = 3a^2 - r^2 + r^2 = 3a^2 = |DX|^2.$$

Dakle ODX je pravokutan trokut, tj. X leži na pravcu OA. ◀

FK5) Konstrukcija sjecišta dva zadana pravca.
Ovu konstrukciju ćemo dobiti rješavanjem sljedeća dva zadatka.

Zadatak 2.9. Konstruirati sjecište X pravaca AB i CD, koji nisu okomiti.

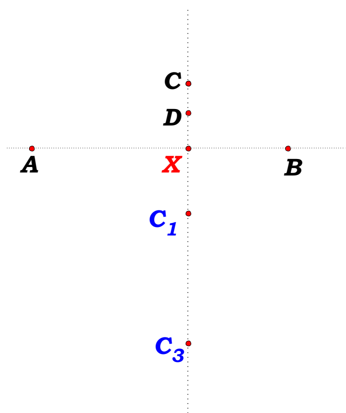
Rješenje. Konstruiramo točku C_1 simetričnu točki C s obzirom na AB, točku C_2 simetričnu točki C_1 s obzirom na CD i točku C_3 simetričnu točki C s obzirom na C_1C_2 (slika 9). Tada su jednakokračni trokuti CC_1C_3, CXC_1 slični. Zato je $|CC_3| : |CC_1| = |CC_1| : |CX|$, tj. $|CC_3| \cdot |CX| = |CC_1|^2$, tj. X je slika od C_3 pri inverziji s obzirom na kružnicu $(C, |CC_1|)$ i konstruira se prema zadatku 2.3.



Slika 9:

◀

Zadatak 2.10. Konstruirati sjecište X okomitih pravaca AB i CD.



Slika 10:

Rješenje. Konstrukcija je slična konstrukciji u zadatku 2.9, samo što je točka C_3 konstruirana kao točka pravca CC_1 ($C_1 = C_2$) takva da je $|CC_3| = 2 \cdot |CC_1|$ (zadatak 2.1).
Tada je X polovište dužine $\overline{CC_1}$. ◀

Napomenimo da se ponekad postavljeni zadaci mogu riješiti jednostavnije direktno, bez razlaganja na spomenute konstrukcije.

Literatura

[1] G. L. Alexanderson, *About the cover: Two theorems on geometric constructions*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 463–467.

[2] M. Gardner, *Mathematical circus*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

[3] L. A. Graham, *The Surprise Attack in Mathematical Problems*, Dover Publications, Inc., New York, 1968.

[4] N. Hungerbühler, *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem*, Amer. Math. Monthly, **101**(1994), 784–787.

[5] J. H. Hlavaty, *Mascheroni constructions*, The Mathematics Teacher, **50**, No. 7 (1957), 482–487.

[6] A. N. Kostovskii, *Geometrical Constructions Using Compasses Only*, Blaisdell Publication Company, 1961.

[7] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.