Osječki matematički list 16 (2016), 169-180

Opialova nejednakost

Ivan Sočo[*], Maja Andrić[†]

Sažetak

Ovaj članak prezentira Opialovu nejednakost i njen originalni dokaz. Također je promatran Olechov dokaz Opialove nejednakosti te njegov doprinos oslabljenju prvotnih uvjeta.

Ključne riječi: *Opialova nejednakost, Cauchy-Schwartzova nejednakost, apsolutno neprekidna funkcija*

The Opial inequality

Abstract

In this article we present the Opial inequality and its original proof. We also discuss the Olech's proof of this inequality and his contribution to the weakening of original conditions.

Keywords: *Opial's inequality, Cauchy-Schwartz's inequality, absolutely continuous function*

[*]Fakultet prirodoslovno matematičkih znanosti, Sveučilište u Mostaru, Mostar, Bosna i Hercegovina, email: ivansoco91@hotmail.com

[†]Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Split, Hrvatska, email: maja.andric@gradst.hr

1 Uvod

Godine 1960. poljski matematičar Zdzisław Opial je dokazao nejednakost koja je izazvala veliko zanimanje ([4]):

> Neka je $f \in C^1[0,h]$ takva da je $f(0) = f(h) = 0$ i $f(t) > 0$ za $t \in (0,h)$. Tada vrijedi
>
> $$\int_0^h |f(t)f'(t)|\, dt \le \frac{h}{4} \int_0^h \left(f'(t)\right)^2 dt,$$
>
> gdje je $\frac{h}{4}$ najbolja moguća konstanta.

Nastali su brojni radovi koji su prezentirali jednostavnije dokaze, različita poopćenja i proširenja, te diskretne verzije nejednakosti Opialova tipa. Više o ovome može se naći u monografiji Agarwala i Panga [1] koja daje pregled nejednakosti Opialova tipa i njihovih primjena u diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama. Najznačajnije primjene su u utvrđivanju jedinstvenosti i egzistencije rješenja početnih i rubnih problema za obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe, te davanje gornje ograde tih rješenja.

Cilj ovog rada je dati Opialov originalni dokaz njegove nejednakosti te Olechov dokaz, koji ne samo da je jednostavniji, nego je i doprinio oslabljenju uvjeta Opialovog teorema.

1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

Neka je $[a,b]$ interval u $\mathbb{R}$, gdje je $-\infty \le a < b \le \infty$. Prostor funkcija na $[a,b]$ koje imaju neprekidne derivacije do uključivo reda n, $n \in \mathbb{N}$, označavamo s $C^n[a,b]$, tj.

$$C^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f^{(k)} \in C[a,b], k = 0,1,\dots,n\}.$$

Posebno, $C^0[a,b] = C[a,b]$ je prostor neprekidnih funkcija na $[a,b]$.
U teoriji mjere izmjerive funkcije imaju jednako važnu ulogu kao što je imaju neprekidne funkcije u topologiji. Opširnije o samoj teoriji može se pogledati u knjizi [2] iz koje dajemo kratki pregled nužan za ovaj članak: ako promatramo skup $\mathbb{R}$, onda za područje definicije mjere μ uzimamo pogodnu familiju podskupova od $\mathbb{R}$ kako bi svakom skupu A te familije pridružili neki broj $\mu(A)$ kao njegovu mjeru. Pritom prazan skup treba biti izmjeriv (mjere nula) kao i svi otvoreni skupovi koji su u matematici fundamentalni. Uzimajući još u obzir da familija izmjerivih skupova treba biti zatvorena na formiranje prebrojivih unija i zatvorena na komplementiranje, generalizacijom dolazimo do definicije σ-algebre.

Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X nazivamo σ-algebrom skupova na skupu X, ako ona ima sljedeća svojstva:

(σ1) $X \in \mathcal{A}$,

(σ2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(σ3) unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$.

Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je izmjeriv prostor, a elemente iz $\mathcal{A}$ nazivamo izmjerivim skupovima.
Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ skup i $f : A \to Y$ funkcija. Funkcija f je izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, ili kraće $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ izmjeriva, ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$. Pritom $f^{-1}(B)$ označava original skupa B, tj.

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A.$$

S $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, označavamo Lebesgueov prostor izmjerivih funkcija f za koje vrijedi $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$, uz normu

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je apsolutno neprekidna na $[a, b]$ ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ takav da za svaku familiju disjunktnih otvorenih podintervala $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ za koju vrijedi

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

slijedi da je

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Prostor apsolutno neprekidnih funkcija na konačnom intervalu $[a, b]$, tj. $-\infty < a < b < \infty$, označavamo s $AC[a, b]$. Taj se prostor podudara s prostorom primitivnih funkcija prostora $L_1[a, b]$, tj. vrijedi

$$f \in AC[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt, \quad \varphi \in L_1[a, b]$$

te stoga za apsolutno neprekidnu funkciju f vrijedi $f'(x) = \varphi(x)$ gotovo svuda na $[a, b]$. S $AC^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, označavamo prostor

$$AC^n[a, b] = \{f \in C^{n-1}[a, b] : f^{(n-1)} \in AC[a, b]\}.$$

Očito je $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

Navedimo nejednakosti potrebne u ovom radu.

Teorem 1.1. (Cauchy-Schwartzova nejednakost) *Neka su f i g realne integrabilne funkcije na intervalu $[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorem 1.2. (Wirtingerova nejednakost) *Neka je f realna funkcija takva da je $f' \in L_2[0,h]$ i $f(0) = f(h) = 0$. Tada je*

$$\int_0^h |f(t)|^2 dt \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^h |f'(t)|^2 dt.$$

2 Opialova nejednakost

Teorem 2.1. (Opialova nejednakost) *Neka je $f \in C^1[0,h]$ takva da je $f(0) = f(h) = 0$ i $f(t) > 0$ za $t \in (0,h)$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\int_0^h \left|f(t)f'(t)\right| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h \left(f'(t)\right)^2 dt, \tag{1}$$

gdje je konstanta $\frac{h}{4}$ najbolja moguća.

Novost koju je donijela Opialova nejednakost je utvrđivanje najbolje moguće konstante, u smislu: $\frac{h}{4}$ je najmanji broj za koji nejednakost (1) vrijedi, a jednakost se može dostići za određenu funkciju f (pogledati napomenu 2.1). Korištenjem Cauchy-Schwartzove nejednakosti i Wirtingerove nejednakosti za $f \in C^1[0,h]$, jednostavno se dobije slabija forma od (1). Naime

$$\begin{aligned}
\int_0^h |f(t)f'(t)| dt &\leq \left(\int_0^h (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h (f'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{h^2}{\pi^2} \int_0^h (f'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h (f'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{h}{\pi} \int_0^h (f'(t))^2 dt.
\end{aligned}$$

Prvo ćemo pokazati Opialov originalni dokaz nakon kojega slijedi Olechov doprinos koji je pokazao da je uvjet $f(t) > 0$ suvišan te da nejednakost vrijedi i za apsolutno neprekidne funkcije na $[0,h]$. Uz to, Olechov dokaz je čak jednostavniji od Opialovog dokaza.

2.1 Opialov dokaz

Započinjemo lemom koja je potrebna u dokazu Opialovog teorema.

Lema 2.1. *Neka su* $p_0 = 0, p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ *nenegativni brojevi takvi da je*

$$p_{2i} \leq p_{2i-1} \quad i \quad p_{2i} \leq p_{2i+1}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (p_{2i+1} - p_{2i}) \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2 \; \geq \; \sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2. \tag{3}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Za $n = 1$ imamo

$$\begin{aligned}
(p_1 - p_0 + p_3 - p_2)^2 + p_2^2 & \\
&= p_1^2 + p_3^2 + 2p_2^2 + 2p_1p_3 - 2p_1p_2 - 2p_2p_3 \\
&= p_1^2 + p_3^2 + 2(p_1 - p_2)(p_3 - p_2) \\
&\geq p_1^2 + p_3^2,
\end{aligned}$$

odnosno, nejednakost (3) vrijedi. Nadalje, neka (3) vrijedi za $n - 1$ $(n > 1)$, tj.

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} (p_{2i+1} - p_{2i}) \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} p_{2i+1}^2.$$

Tada dobijemo

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2+\sum_{i=1}^{n}p_{2i}^2\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})+(p_{2n+1}-p_{2n})\right)^2+\sum_{i=1}^{n}p_{2i}^2\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right]^2+2(p_{2n+1}-p_{2n})\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)\\
&\quad+(p_{2n+1}-p_{2n})^2+\sum_{i=1}^{n}p_{2i}^2\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2+2(p_{2n+1}-p_{2n})\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)\\
&\quad+p_{2n+1}^2-2p_{2n}p_{2n+1}+p_{2n}^2+\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+p_{2n}^2\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+p_{2n+1}^2\\
&\quad+2(p_{2n+1}-p_{2n})\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)-2p_{2n}(p_{2n+1}-p_{2n})\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+p_{2n+1}^2\\
&\quad+2(p_{2n+1}-p_{2n})\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})-p_{2n}\right)\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+p_{2n+1}^2\\
&\quad+2(p_{2n+1}-p_{2n})\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i+2})\\
&\geq\left(\sum_{i=0}^{n-1}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+p_{2n+1}^2\\
&\geq\sum_{i=0}^{n-1}p_{2i+1}^2-\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+\sum_{i=1}^{n-1}p_{2i}^2+p_{2n+1}^2\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}p_{2i+1}^2+p_{2n+1}^2\;=\;\sum_{i=0}^{n}p_{2i+1}^2. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Prikažimo sada Opialov dokaz njegove nejednakosti (1). *Dokaz.* Na intervalu $[0,h]$ definiramo funkciju $y(t) = \int_0^t |f'(s)|ds$, takvu da vrijedi $y'(t) = |f'(t)|$. Slijedi

$$\begin{aligned}\int_0^h y(t)|f'(t)|dt &= \int_0^h y(t)y'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^h dy^2(t) \ = \ \frac{1}{2}\Big(y^2(h) - y^2(0)\Big) \\ &= \frac{1}{2}y^2(h). \end{aligned} \tag{4}$$

S druge strane imamo

$$y(h) = \int_0^h |f'(t)|dt. \tag{5}$$

Kvadriranjem obiju strana u jednakosti (5) i korištenjem Cauchy-Schwartzove nejednakosti dobijemo

$$\begin{aligned} y^2(h) &= \left(\int_0^h |f'(t)|dt\right)^2 \\ &\le \left(\int_0^h (f'(t))^2 dt\right)\left(\int_0^h dt\right) \\ &= h\int_0^h (f'(t))^2 dt. \end{aligned} \tag{6}$$

S $\overline{\varphi}$ označimo srednju vrijednost funkcije φ na $[a,b]$, tj.

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Iz (5) zaključujemo da je srednja vrijednost funkcije $|f'|$ na $[0,h]$ jednaka

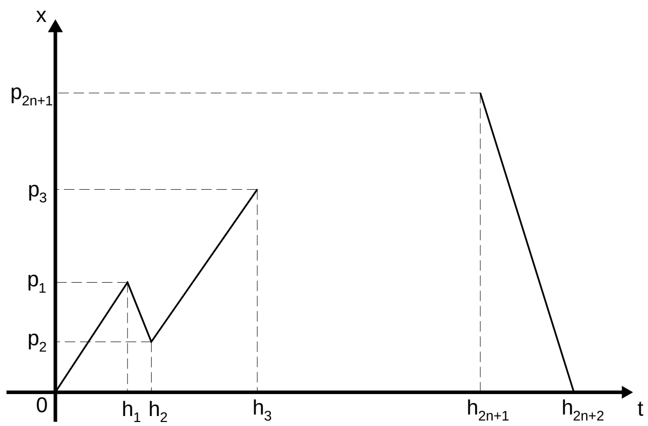
$$\overline{|f'|} = \frac{1}{h}\int_0^h |f'(t)|dt = \frac{y(h)}{h},$$

a iz (6) za funkciju $(f')^2$ na $[0,h]$ slijedi

$$\overline{(f')^2} = \frac{1}{h}\int_0^h (f'(t))^2 dt \ \ge \ \frac{1}{h}\frac{y^2(h)}{h} = \left(\frac{y(h)}{h}\right)^2.$$

Neka funkcija f na segmentu $[0,h]$ ima konačan broj lokalnih minimuma i maksimuma. Nadalje, neka su maksimumi $p_1, p_3, \ldots, p_{2n+1}$, a minimumi

$p_0 = 0, p_2, \ldots, p_{2n}, p_{2n+2} = 0$, kao na slici 1. Očito p_i $(i = 0, 1, \ldots, 2n+2)$ zadovoljavaju uvjete (2).



Slika 1:

Neka su h_i t-koordinate točaka p_i, $0 \leq i \leq 2n+2$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
y(h) &= \sum_{i=0}^{2n+1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} |f'(t)| dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} \int_{h_{2i}}^{h_{2i+1}} f'(t) dt - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{h_{2i-1}}^{h_{2i}} f'(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} (p_{2i+1} - p_{2i}) - \sum_{i=1}^{n+1} (p_{2i} - p_{2i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (p_{2i+1} - p_{2i}) - \left(\sum_{i=0}^{n} p_{2i} - \sum_{i=0}^{n} p_{2i+1} \right) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{n} (p_{2i+1} - p_{2i}). \qquad (7)
\end{aligned}$$

Slično se pokaže

$$\int_0^h f(t)|f'(t)| dt \; = \; \sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2. \qquad (8)$$

Sada koristeći lemu 2.1 te nejednakosti (6)–(8) dobijemo upravo Opialovu nejednakost

$$\begin{aligned}4\int_0^h f(t)|f'(t)|dt &= 4\left(\sum_{i=0}^{n} p_{2i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} p_{2i}^2\right)\\ &\le 4\left(\sum_{i=0}^{n}(p_{2i+1}-p_{2i})\right)^2\\ &= \frac{4y^2(h)}{4} = y^2(h)\\ &\le h\int_0^h (f'(t))^2 dt.\end{aligned}$$

Za proizvoljnu funkciju f, dovoljno je razmotriti niz funkcija $\{f_n\}$, gdje svaka f_n zadovoljava uvjete teorema 2.1, ima samo konačan broj lokalnih minimuma i maksimuma na segmentu $[0,h]$ te

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(t) = f'(t)$$

uniformno na $[0,h]$. Opialova nejednakost sada slijedi umetanjem limesa pod integral u nejednakostima

$$\int_0^h |f_n(t) f_n'(t)|dt \ \le\ \frac{h}{4}\int_0^h \left(f_n'(t)\right)^2 dt, \quad n = 1,2,\ldots \qquad \square$$

Napomena 2.1. Jednostavno je konstruirati funkciju za koju vrijedi jednakost u (1). Na primjer, neka je funkcija definirana s

$$f_0(t) = \begin{cases} ct, & 0 \le t \le \frac{h}{2} \\ c(h-t), & \frac{h}{2} \le t \le h \end{cases} \tag{9}$$

gdje je $c > 0$ proizvoljna konstanta. Promotrimo lijevi i desni limes funkcije u točki $t = \frac{h}{2}$:

$$\lim_{t\to\frac{h}{2}^-} \frac{f_0(t) - f_0(\frac{h}{2})}{t-\frac{h}{2}} = \frac{ct - c\frac{h}{2}}{t-\frac{h}{2}} = \frac{c(t-\frac{h}{2})}{t-\frac{h}{2}} = c$$

$$\lim_{t\to\frac{h}{2}^+} \frac{f_0(t) - f_0(\frac{h}{2})}{t-\frac{h}{2}} = \frac{c(h-t) - c\frac{h}{2}}{t-\frac{h}{2}} = \frac{-c(t-\frac{h}{2})}{t-\frac{h}{2}} = -c.$$

Premda ova funkcija nije derivabilna u $t = \frac{h}{2}$, možemo je aproksimirati funkcijama klase $C^1[0,h]$ za koje vrijedi (1). Tada je konstanta $\frac{h}{4}$ najbolja moguća.

Napomena 2.2. Neka je y funkcija koja zadovoljava uvjete Opialovog teorema 2.1. Tada za funkciju $f(t) = \sqrt{y(t)}$ iz nejednakosti (1) dobijemo

$$\begin{aligned} \int_0^h \sqrt{y(t)} \left| \frac{1}{2} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} \right| dt &\leq \frac{h}{4} \int_0^h \left(\frac{1}{2} \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} \right)^2 dt \\ \frac{1}{2} \int_0^h |y'(t)| dt &\leq \frac{h}{16} \int_0^h \frac{(y'(t))^2}{y(t)} dt \\ \int_0^h |y'(t)| dt &\leq \frac{h}{8} \int_0^h \frac{(y'(t))^2}{y(t)} dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Prema tome, totalna varijacija funkcije y može se ograničiti integralom od $\frac{(y'(t))^2}{y(t)}$. Nadalje, budući vrijedi

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^t y'(s) ds - \int_t^h y'(s) ds \right),$$

iz čega slijedi

$$\max_{0 \leq t \leq h} |y(t)| \leq \frac{1}{2} \int_0^h |y'(t)| dt,$$

onda direktno iz (10) dobijemo

$$\max_{0 \leq t \leq h} |y(t)| \leq \frac{h}{16} \int_0^h \frac{(y'(t))^2}{y(t)} dt.$$

2.2 Olechov dokaz

Da pretpostavke Opialovog teorema ne trebaju biti toliko stroge dokazao je Olech u sljedećem teoremu ([3]).

Teorem 2.2. *Neka je $f \in AC[0,h]$ i neka je $f(0) = f(h) = 0$. Tada za funkciju f vrijedi nejednakost* (1). *Nadalje, jednakost je zadovoljena ako i samo ako je $f = f_0$, gdje je f_0 funkcija definirana s* (9).

Dokaz. Neka je $y(t) = \int_0^t |f'(s)| ds$ i $z(t) = \int_t^h |f'(s)| ds$. Tada imamo sljedeće dvije relacije

$$y'(t) = |f'(t)| = -z'(t), \tag{11}$$

$$|f(t)| \leq y(t), \quad |f(t)| \leq z(t), \quad t \in [0,h]. \tag{12}$$

Iz relacija (11) i (12) slijedi

$$\int_0^{\frac{h}{2}} |f(t)f'(t)|dt \le \int_0^{\frac{h}{2}} y(t)y'(t)dt \;=\; \frac{1}{2}y^2\left(\frac{h}{2}\right), \tag{13}$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{h} |f(t)f'(t)|dt \le -\int_{\frac{h}{2}}^{h} z(t)z'(t)dt \;=\; \frac{1}{2}z^2\left(\frac{h}{2}\right). \tag{14}$$

Zbrajanjem (13) i (14) dobijemo

$$\int_0^{h} |f(t)f'(t)|dt \;\le\; \frac{1}{2}\left(y^2\left(\frac{h}{2}\right)+z^2\left(\frac{h}{2}\right)\right). \tag{15}$$

S druge strane, koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost, imamo

$$\begin{aligned}
y^2\left(\frac{h}{2}\right) &= \left(\int_0^{\frac{h}{2}} |f'(t)|dt\right)^2 \\
&\le \left(\int_0^{\frac{h}{2}} (f'(t))^2 dt\right)\left(\int_0^{\frac{h}{2}} dt\right) \\
&= \frac{h}{2}\int_0^{\frac{h}{2}} (f'(t))^2 dt, \qquad (16)\\
z^2\left(\frac{h}{2}\right) &= \left(\int_{\frac{h}{2}}^{h} |f'(t)|dt\right)^2 \\
&\le \left(\int_{\frac{h}{2}}^{h} (f'(t))^2 dt\right)\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h} dt\right) \\
&= \frac{h}{2}\int_{\frac{h}{2}}^{h} (f'(t))^2 dt. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Iz posljednje tri relacije slijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^{h} |f(t)f'(t)|dt &\le \frac{1}{2}\left(y^2\left(\frac{h}{2}\right)+z^2\left(\frac{h}{2}\right)\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\int_0^{\frac{h}{2}} (f'(t))^2 dt + \frac{h}{2}\int_{\frac{h}{2}}^{h} (f'(t))^2 dt\right) \\
&\le \frac{h}{4}\int_0^{h} (f'(t))^2 dt,
\end{aligned}$$

čime je dokazana Opialova nejednakost (1).

Preostaje pokazati da je $f = f_0$. Neka vrijedi Opialova jednakost u (1). Tada koristeći jednakosti u (15)–(17) dobijemo

$$\left(\int_0^{\frac{h}{2}} |f'(t)| dt \right)^2 = \frac{h}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} (f'(t))^2 dt \tag{18}$$

i

$$\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h} |f'(t)| dt \right)^2 = \frac{h}{2} \int_{\frac{h}{2}}^{h} (f'(t))^2 dt. \tag{19}$$

Ako razmotrimo Cauchy-Schwartzovu jednakost, onda su (18) i (19) mogući ako i samo ako je $|f'|$ konstantna skoro svuda na $[0, \frac{h}{2}]$ i $[\frac{h}{2}, h]$. Sada ako upotrijebimo (11) i jednakosti u (12), slijedi da je $f = f_0$. □

Literatura

[1] R. P. Agarwal, P. Y. H. Pang, *Opial Inequalities with Applications in Differential and Difference Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1995).

[2] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek (2012).

[3] C. Olech, *A simple proof of a certain result of Z. Opial*, Ann. Polon. Math. **8**(1960), 61–63.

[4] Z. Opial, *Sur une inegalite*, Ann. Polon. Math. **8**(1960), 29–32.