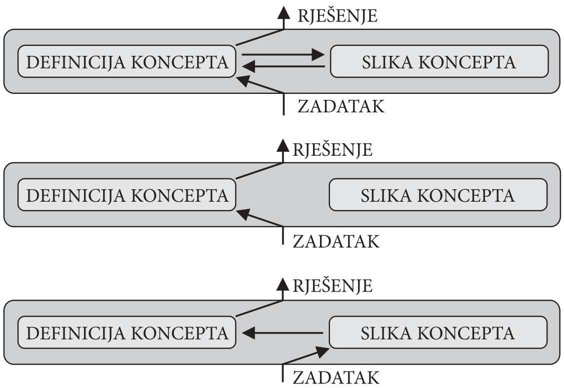
Uloga nastavnika pri formiranju matematičkih koncepata kod učenika

Matea Gusić[1]

Nastava matematike temelji se na usvajanju apstraktnih koncepata za čije je (ispravno) formiranje, kao posrednik između učenika i matematičkog znanja, odgovoran nastavnik. Nastavnik je taj koji organizacijom rada (odabirom nastavnih metoda, didaktičkog materijala, primjera, zadataka...) osigurava tijek kognitivnih procesa pomoću kojih se kod učenika oblikuje znanje. Svrha ovog članka jest osvijestiti važnost promišljanja nastavnika o odabiru pravilnih primjera i zadataka prilikom planiranja sata.

Konceptualizacija i slika koncepta

Matematički koncepti grade se postupno, mijenjajući se pod utjecajem novog iskustva, primjera, odnosno konteksta u kojem se pojavljuju. Uz *definiciju koncepta* – verbalnu definiciju koja točno i necirkularno objašnjava koncept, kod učenika se stvara *slika koncepta* – individualna kognitivna struktura (neverbalna) koja uključuje: vizualne reprezentacije, mentalne slike, pridružena svojstva (ne nužno ispravna), procese, primjere i iskustva vezana uz koncept. Razumijevanje nekog koncepta vidljivo je kroz razinu (ispravnost) formiranosti koncepta i mogućnost njegove primjene (Vinner, 2002.).

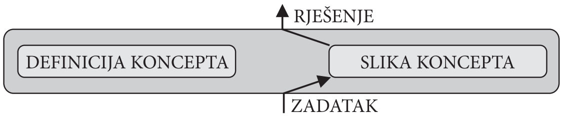


Slika 1. Poželjni modeli rješavanja matematičkog problema

[1]Matea Gusić, Učiteljski fakultet, Zagreb

Poucak 67.indd 4 19.10.2016. 13:21:17

Matematičar će bez problema kategorizirati znanje koje se nalazi unutar konceptualne strukture konzultirajući se s *definicijom koncepta*. To je logički i formalan pristup koji matematičaru daje sigurnost u ispravnost vlastitih postupaka (Vinner, 2002.). Modeli za koje bi nastavnici željeli da ih njihovi učenici koriste prilikom rješavanja matematičkog problema prikazani su na slici 1. Međutim, učenicima je takav formalan pristup često nerazumljiv. Istraživanja su pokazala da će, suočen s problemom, učenik konzultirati *sliku koncepta*. Također, da će upravo *slika koncepta* odlučivati o strategijama rješavanja tog problema, čak i kada su definicija, koju učenik poznaje, i *slika koncepta* u kontradikciji. Model rješavanja problema kojim se najčešće služe učenici prikazan je na slici 2. (Vinner, 1983.).



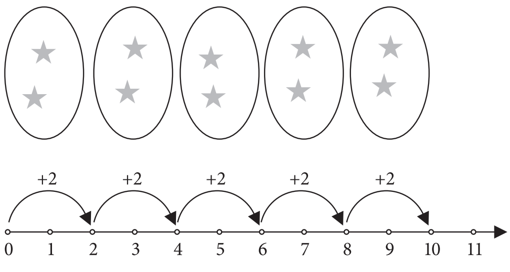
Slika 2. Učestali model rješavanja matematičkog problema kod učenika

Ove spoznaje ukazuju na to da za dobro formiranje koncepta nije dovoljno samo dati definiciju i nekoliko primjera, ali i da se *slika koncepta* u umu učenika djelomično formira bez ikakve kontrole nastavnika. Važno je da su nastavnici upoznati s ovim spoznajama kako bi se mogli aktivno posveti kvalitetnoj izgradnji *slike koncepta*.

Primjeri i protuprimjeri

Svrha primjera je da povećaju učeničko iskustvo koje pak omogućava ispravnije formiranje koncepta. Uloga primjera je dvostruka: prije uvođenja novih koncepta primjeri imaju ulogu motivacije učenika, odnosno usmjeravanja njihove pažnje na novi izvor znanja, a unutar samog procesa formiranja koncepta, tražeći i provjeravajući određene atribute unutar primjera, učenik gradi novo znanje. Varirajući složenost primjera kao i njihovu raznolikost, omogućavamo oblikovanje višestrukih veza, odnosno bolju konceptualizaciju (Barth, 2002.).

Ne smijemo zaboraviti niti na važnost protuprimjera jer upravo oni izražavaju što neki koncept jest, a što nije. Zadajući učenicima da komentiraju protuprimjere



Slika 3. Skupovni model i model brojevnog pravca za množenje prirodnih brojeva

vrlo bliske primjerima koncepta, omogućavamo utvrđivanje granica koncepta i testiramo učeničko znanje odnosno razumijevanje (Barth, 2002.). Protuprimjeri su posebno vrijedni kada učenici uče svojstva nekih matematičkih koncepata kako bi se otklonile česte miskoncepcije koje nastaju pod *to je uvijek tako* argumentom. Jedna od takvih miskoncepcija je i sljedeća: *Kvadrati brojeva uvijek su veći (ili jednaki) od samoga broja*. Do pridodavanja pogrešnog svojstva pojmu kvadriranja ovdje ne dolazi radi koncepta kvadrata broja, nego radi nerazumijevanja pojma množenja. Naime, zbog modela množenja prirodnih brojeva kao skraćenog zbrajanja istih pribrojnika (slika 3), učenici donesu zaključak da je umnožak (pozitivnih) brojeva uvijek veći ili jednak od faktora. S obzirom da je kvadriranje upravo specijalni slučaj množenja broja samog sa sobom, logično je da učenici donesu isti zaključak. Za otklanjanje ovakvih miskoncepcija važno je učenicima dati na analizu veliki broj protuprimjera, odnosno kvadrate brojeva iz intervala $\langle 0, 1\rangle$.

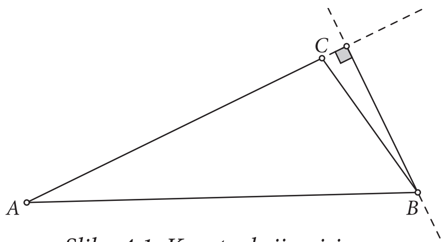
Primjer funkcija

Ako su primjeri s kojima se učenici (u pravilu) susreću jednolični i ne obuhvaćaju sva svojstva matematičkog koncepta, učenici će na temelju njih donijeti pogrešne zaključke. Primjerice, nadodat će konceptu nepostojeći uvjet. Na primjer, učenici kojima se da jednadžba funkcije $f(x) = 5$, znaju tvrditi kako to ne može biti jednadžba funkcije jer se s desne strane jednakosti ne nalazi x.

Kod učenika može doći do pogrešnog formiranja koncepta i kad ne postoji realni kontekst s kojim mogu povezati matematički apstraktne koncepte. U tom slučaju učenici nove koncepte povežu s od prije poznatim, jasnijim konceptima. Primjerice, zbog funkcijskih formula u obliku jednakosti kod kojih se s jedne strane nalazi $f(x)$, a s druge algebarski izraz, učenici koncept funkcije znaju povezati s konceptom jednadžbe. Tada dolazi do zaključka da funkcija jest jednadžba koja se od „drugih" jednadžbi razlikuje po tome što uvijek s lijeve strane jednakosti ima $f(x)$.

Nekoliko konflikata iz geometrije

Često se događa da slike iz udžbenika i na ploči (pa s toga i u bilježnicama), prikazuju specijalne slučajeve, odnosno položaje određenog geometrijskog pojma. S obzirom na učestalost istog vizualnog prikaza, u *slikama koncepta* znaju se naći specifične miskoncepcije odnosno konflikti. Koliko su „sužavanja" koncepta radi učestalosti „istih" primjera ukorijenjena u našim *slikama koncepta* pokazuje i idući primjer: od studenata 4. godine Učiteljskog fakulteta u Čakovcu tražilo se da u bilježnice nacrtaju dužinu duljine 4 cm. Svih 40 studenata prisutnih na predavanju nacrtalo



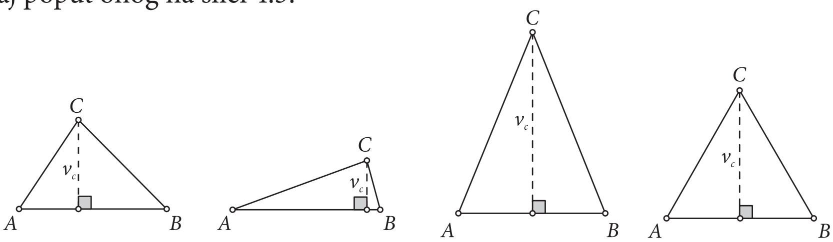
Slika 4.1. Konstrukcija visine tupokutnog trokuta

Poucak 67.indd 6 19.10.2016. 13:21:17

je dužinu označenu s $\overline{AB}$ u horizontalnom položaju. Ovi studenti bi prepoznali da se radi o dužini i kad bi bila zadana drugim oznakama i u manje tipičnim položajima, ali često se dogodi da učenici to nisu u stanju.

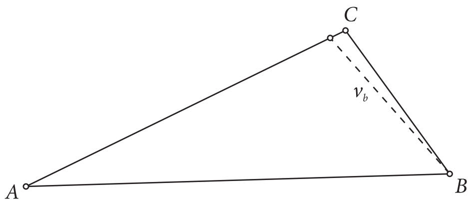
Tri učestala konflikta vezana su uz trokute: „Pravokutnom trokutu jedna je kateta horizontalna, a druga vertikalna", „Osnovica jednakokračnog trokuta je horizontalna" i „Visina uvijek pada unutar trokuta".

Zamislimo da je učeniku zadano da odredi visinu tupokutnog trokuta na jednu od stranica koje čine tupi kut (slika 4.1.). Čak i kad je učenik upoznat s definicijom visine trokuta: „Visina trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta i nožište okomice iz tog vrha na nasuprotnu stranicu trokuta", ukoliko je ne razumije u potpunosti ili nije navikao koristiti definicije prilikom suočavanja s matematičkim problemom, konzultirat će se sa *slikom koncepta*, odnosno vizualnim prikazima poput onih danima na slici 4.2. S obzirom na to da mu se potencijalna rješenja ne preklapaju s primjerima unutar slike koncepta, moguća rješenja učenika su da trokut nema traženu visinu, ili pokušaj poput onog na slici 4.3.



Slika 4.2. Mogući vizualni prikazi visina trokuta u učeničkoj slici koncepta

Kada se granice dvaju srodnih koncepta ne utvrde dovoljno jasno, dolazi do njihovog ispreplitanja. Klasičan primjer toga su krug i kružnica. Ispreplitanje koncepata možemo izbjeći na način da osiguramo da učenici kroz vlastito iskustvo dožive njihove ključne razlike. U slučaju kruga i kružnice to se može postići kroz aktivnosti razvrstavanja modela, gdje učenici razdvajaju modele kružnice (prsten, narukvicu, obruč, zračnicu gume za bicikl...) od modela kruga (tanjur, poklopac, frizbi...).



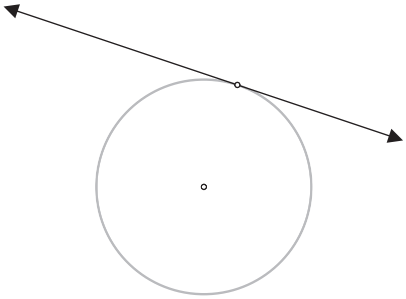
Slika 4.3. Rješenje zadatka „konstrukcija visine trokuta" koje odgovara učeničkoj slici koncepta prema prikazima na slici 4.2

Primjer slike koncepta tangente

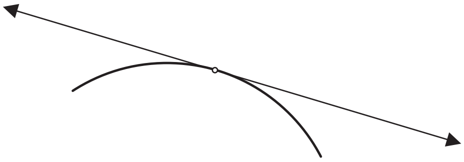
Prvi susret učenika s pojmom tangente povezan je uz tangentu kružnice (slika 5.1.). Tada je tangenta pravac koji „dodiruje" kružnicu u nekoj točki s te kružnice. Prilikom korištenja pojma učenici se služe svojevrsnom samokontrolom koja kaže:

Poucak 67.indd 7 19.10.2016. 13:21:17

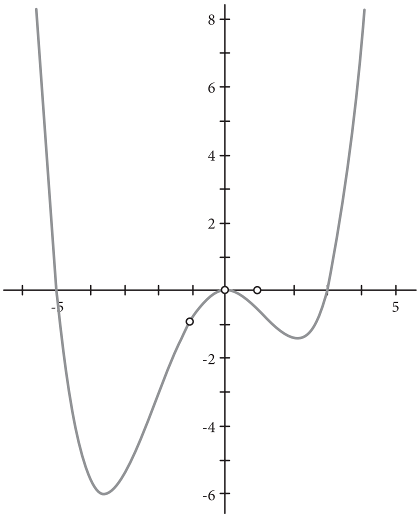
„tangenta dira kružnicu tu u toj točki i nigdje drugdje". Kasnije se pojam tangente proširuje na krivulje (primjerice krivulje II. reda). Ideja same tangente prenosi se s kružnica na krivulje, u slici koncepta ostaje ista vizualna reprezentacija kojoj je „odrezan" zatvoreni dio krivulje (slika 5.2.). Zamislimo da je učeniku postavljen problem „Može li se nacrtati tangenta na zadanu krivulju (slika 5.3.) kroz točku A?" Konzultirajući se sa slikom koncepta i služeći se samokontrolom: „tangenta dira krivulju u točki A i nigdje drugdje", učenik će zaključiti da se tangenta ne može nacrtati. Istraživanja (Vinner, 2002.) su pokazala da u zadatcima ovoga tipa, suočeni s rješenjem zadatka (slika 5.4.), učenici pravac ne prepoznaju kao tangentu, s argumentom: „Prikazani pravac „dodiruje" krivulju u točki A, ali nije tangenta jer je siječe na još dva mjesta".



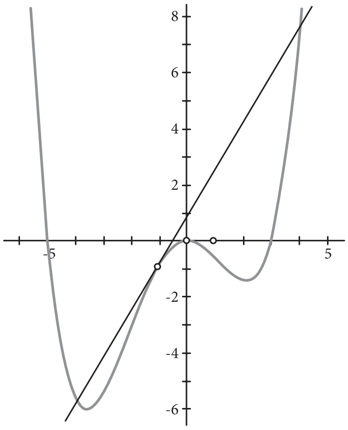
Slika 5.1. Tangenta na kružnicu



Slika 5.2. Tangenta u točki krivulje



Slika 5.3. Krivulja kojoj treba odrediti tangentu u točki A



Slika 5.4. Tangenta na krivulju u točki A.

Poucak 67.indd 8 19.10.2016. 13:21:18

Kontekstualizacija i osnovne ideje

Kontekst i razumijevanje konteksta imaju važnu ulogu u formiranju koncepta, odnosno u tumačenju smisla (Barth, 2002.). Koliko je čvrsta veza između razvoja koncepta i konteksta u kojem se koncept razvija možemo vidjeti i na primjeru malog djeteta kad povezuje riječ „mama" s njegovim pojmom. U početku će dijete tu riječ povezivati isključivo sa svojom majkom i niti jedna druga majka neće biti prepoznata kao „mama". Tek širenjem samog pojma dolazi do shvaćanja da mama može biti i „tuđa". Učenik u početku novi koncept povezuje samo s kontekstom u kojem ga je upoznao i ne prepoznaje ga izvan tog konteksta. Tek kad se slika koncepta popuni s raznolikim iskustvom i kad se pod utjecajem različitih konteksta koncept adekvatno formira, učenik je sposoban transferirati znanje i u neuobičajene situacije. Važnost kontekstualizacije, odnosno povezivanja apstraktnog matematičkog pojma s adekvatnim realnim (životnim) kontekstom, uočili su i veliki njemački metodičari matematike, na čelu s Rudolfom vom Hofeom. Provodeći istraživanja, primijetili su da su prilikom razmišljanja, u svrhu postavljanja strategije za rješenje matematičkih problema, uvijek prisutne intuitivne pretpostavke i slike učenika bazirane na realnim kontekstima. Zaključili su da u nastavi dolazi do problema kada se značenja koja učenici pridodaju matematičkim simbolima i konceptima razlikuju od onih koja su pretpostavili nastavnici. Vom Hofe smatra da je važno da učenik uz matematičke koncepte razvije *osnovne ideje* (njem. *Grundvorstellungen*). Uloga *osnovnih ideja* je da verbalno ili grafički ilustriraju srž matematičkog koncepta pridružujući mu realni kontekst. Tako je primjerice *osnovna ideja* zbrajanja prirodnih brojeva združivanje dvaju skupova, dok kod dijeljenja to može biti ideja *podijeliti cjelinu na* odnosno *podijeliti cjelinu između*. *Osnovne ideje* dakle služe kao most između individualnog svijeta, realnog svijeta i svijeta matematike (Vom Hofe, 1998.).

Slučaj algebarskih izraza

U cjelini „Algebarski izrazi" koja se obrađuje u prvim razredima srednjih škola, svrha je da učenici ovladaju algebarskim manipulacijama te da usvoje pojmove poput: *razlika kvadrata, zbroj i razlika kubova*, te *kvadrat i kub binoma*. Samim nabrajanjem izraza poput „algebarska manipulacija", „kvadrat binoma", „razlika kvadrata" jasno je da se radi o apstraktnim pojmovima kojima će biti teško pridodati značenje izvan matematike jer se radi o objektima koji su upravo unutar matematike i kreirani. Za uspješnu manipulaciju algebarskim izrazima učenik mora naučiti „pravila igre" i da se prilikom manipulacije matematičkim simbolima služi isključivo tim pravilima, a ne nekim drugima. Zbog nemogućnosti povezivanja „pravila igre" sa stvarnošću, dio učenika nije u mogućnosti razumjeti ih, pa im jedino preostaje da ih nauče na razini reprodukcije. Takav će učenik, u neposrednom vremenskom okviru od obrade nastavne cjeline algebarskih izraza, biti u stanju uspješno riješiti zadatak u kojemu se nalazi izraz $(x - 1)^2$, prepoznajući da u ovom slučaju mora primijeniti formulu za kvadrat binoma. Međutim, ukoliko učenik ne razumije koncepte u pozadini zadatka, dogodit će se i da brojevni

Poucak 67.indd 9 19.10.2016. 13:21:18

izraz oblika $(5 - 3)^2$ također računa primjenom formule za kvadrat binoma, ne uočavajući da je izraz jednak kvadratu broja 2. Također, premda primjena formule za kvadrat binoma učenicima može ući u automatizaciju, čak i ako ne razumiju pozadinske koncepte, takvim će učenicima biti teško istu tu formulu prepoznati u izrazu $x^2 - 2x + 1$.

Slučaj tekstualnih zadataka

Upravo su kontekstualni zadatci ti koji imaju utjecaj na produbljivanje *slike koncepta* stvarajući kod učenika jasnije *osnovne ideje*. Tri su glavna razloga radi kojih učenici s kontekstualnim, kao vrstom tekstualnih zadataka imaju problema (Prediger, 2009.):

1. Čitanje s (ne)razumijevanjem, odnosno nesposobnost učenika da razumiju značenje napisanih riječi.
2. Nepoznavanje nematematičkog sadržaja teksta, odnosno konteksta u koji je matematički problem uronjen.
3. Nemogućnost transferiranja iz realnog u matematički kontekst, odnosno odabira ispravnog matematičkog modela.

Analizom razloga neuspješnog rješavanja kontekstualnog zadatka, s obzirom na treći razlog, nastavnik može provjeriti razinu razumijevanja pojedinog matematičkog koncepta kod učenika. Zato je prilikom zadavanja kontekstualnog zadatka važno voditi računa da zadatak ne navodi na pogrešnu konceptualizaciju, odnosno da je kontekst zaista iskorišten u svrhu produbljivanja *slike koncepta*. S tom svrhom analizirat će se četiri zadatka iz aktualnih udžbenika iz matematike za razrednu nastavu:

Zadatak: „Linina je mama kupila 85 cm tkanine za suknju. Za hlače je kupila 120 cm, a za jaknu 225 cm tkanine. Koliko je ukupno tkanine kupila Linina mama?"

Nastavna jedinica: Mjerenje veličina.

Izražena su dva problema ovakvog zadatka. Prvi je miješanje modela za duljinu odnosno opseg s modelom za površinu. Odrasli su većinom upoznati s time da se tkanina, koja je jedan od modela za površinu, u trgovinama kupuje na metre, pa im je ovakvo zadavanje zadatka prirodno. Ne možemo pretpostaviti da će učenici poznavati „pozadinu priče", pa bi kod njih ovakav zadatak mogao prouzročiti nejasnoće u korištenju modela i potencijalno preklapanje slika različitih koncepata.

Drugo pitanje koje se nameće jest „Što od mene zadatak traži?" Nema opravdanog razloga za združivanje zadana tri skupa (tkanina za suknju, jaknu i hlače). Učenici će možda i zbrojiti dana tri broja, ali zato što se od njih u matematici uvijek traži da na danim brojevima izvrše neku računsku operaciju, ne zato što iza tog čina stoji razumijevanje. Ovakvim zadatkom ne postižu se traženi ishodi u vidu nastavne jedinice *mjerenje veličina*. Primjereniji bi bio zadatak u u se kupuju ukrasne trakice različitih boja. Premda i trakice imaju svoju širinu, radi se o modelu za duljinu koji je učenicima prirodan.

Poucak 67.indd 10 19.10.2016. 13:21:18

Zadatak: „U jednoj pernici nalazi se 5 flomastera i 7 olovaka. Koliko se pisaljki nalazi u 5 pernica?"

Nastavna jedinica: množenje zbroja brojem

Krenimo s problemom nepostojanja motivacije za rješavanje ovako formuliranog zadatka. Osim što je teško vidjeti razlog zašto bi nekoga zanimalo koliko se pisaljki nalazi u pet pernica, iz toga što se u jednoj pernici nalazi 5 flomastera i 7 olovaka ne slijedi da i idućih pet pernica ima isti takav sadržaj. Tu je i problem korištenja pojma „pisaljke". Naime, to što znamo koliko se flomastera i olovaka nalazi u pernici ne znači da znamo sav sadržaj pernice koji bi mogao spadati pod pisaljke, poput primjerice bojica. Što se tiče prikladnosti odabira zadatka s obzirom na nastavnu jedinicu, strateški gledano, realnije je da će učenik zadatak rješavati idućom logikom: *U jednoj se pernici nalazi ukupno 12 pisaljki, dakle u pet pernica nalazi se pet puta više pisaljki. Dvanaest puta pet je šezdeset, pa u pet pernica ima 60 pisaljki.*

Zadatak: „Velika čokolada stoji 24 kune. Može li Nikola kupiti 4 čokolade ako ima 100 kuna?"

Nastavna jedinica: Pisano množenje dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim brojem

Većina se učenika zaista našla u situaciji opisanoj ovim zadatkom. Prilikom rješavanja zadatka, učenik koji ima poteškoća s matematičkim konceptima može strategiju rješavanja zadatka osmisliti uz pomoć vlastitog iskustva, što je pozitivno korištenje konteksta u svrhu pridodavanja *osnovnih ideja* konceptu množenja. Također, ovakvi zadatci učenicima pokazuju da znati množiti zaista jest važna životna kompetencija, te im podiže motivaciju, pogotovo jer su tema slatkiši i novci, što se u praksi pokazuje kao dobar motivacijski model.

Zadatak: „U Republici Hrvatskoj je 12 sati. U Americi je 6 sati ujutro. Koliko je sati vremenske razlike između Hrvatske i Amerike? Koliko će sati biti kod nas, a koliko u Americi za 4 sata? Kolika će tada biti vremenska razlika? Koliko će sati biti kod nas, a koliko u Americi za 6 sati? Kolika će tada biti vremenska razlika?"

Nastavna jedinica: Stalnost razlike

U vidu nastavne jedinice, ovo je jako dobar primjer zadatka ukoliko se nađe unutar sata obrade. Ipak, važno je pripaziti na nekoliko elemenata ovog zadatka. Prvi je taj što kod učenika *slika koncepta* „vremenske razlike" može biti u potpunosti prazna ili nedovoljno izgrađena. Također treba uzeti u obzir da se u praksi vidi da učenici prvih razreda gimnazijskih programa na nastavi geografije imaju problema s razumijevanjem pojma vremenske razlike, a ovdje se od učenika razredne nastave očekuje da shvate pojam vremenske razlike kako bi suštinu „stalnosti" transferirali iz konteksta u matematiku. Zato je važno da se ovakav zadatak riješi pod strogo kontroliranim vodstvom nastavnika. Također, vremenska razlika između Amerike i Hrvatske proteže se od 5 do 10 sati. Premda se zadatak obrađuje na nastavi matematike,

Poucak 67.indd 11 19.10.2016. 13:21:18

važno je da nastavnik vodi računa da ne stvara potencijalne konflikte u konceptima drugih predmeta. Ovaj problem lako se može riješiti zamijenivši preširoki pojam „Amerika" s užim, „New York".

Zaključak

Osim apstrahiranih svojstva, u učeničkoj strukturi koncepta nalazit će se i proces kojim je došlo do njegovog formiranja (primjeri, individualne intuitivne ideje, osnovne ideje o konceptu). Dakle, koncept će se formirati pod utjecajem primjera i zadataka koje nastavnik prezentira učenicima, ali također i pod nedostatkom primjera koji bi mogli spriječiti nastanak miskoncepcija. Za kvalitetno formiranje koncepta nije dovoljno učenicima dati definiciju i nekoliko primjera, već učenike treba svjesno uključiti u samu izgradnju putem analize primjera, promišljanja, komentiranja i osobnog iskustva. Postupci kojima nastavnici mogu osigurati kvalitetnije formiranje koncepta, odnosno umanjiti količinu miskoncepcija, jesu promišljanje o primjerima koje učenicima prezentiraju, te proširivanje slike koncepta kontekstualizacijom.

Literatura:

1. Abbaci, D. J, Ćosić, K, Hižak, N, Sudar, E. (2014.). Nove matematičke priče 4, radna bilježnica. Profil.
2. Barth, B. M. (2004.). Razumjeti što djeca razumiju. Profil.
3. Markovec, J. (2013.). Matematika 3, radna bilježnica. Alfa.
4. Prediger, S. (2009.). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Grin.
5. Vinner, S.(1983.). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305.
6. Vinner, S. (2002.). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. U Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers, 11, 65-81.
7. Vinner, S. (2002.). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. U Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers, 11, 3-24.
8. Tall, D. (1988.). Concept Image and Concept Definition. Senior Secondary Mathematics Education, OW&OC Utrecht, 37-41.
9. Vom Hofe, R. (1998.). On the generation of Basic ideas and Individual Images: normative, descriptive and constructive aspects. U A. Sierpinska, J. Kilpatrick, Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. Kluwer Academic Publishers, (str. 317-331).
10. Vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W., Pekrun, R. (2005.). On the Role of „Grundvorstellungen" for the Development of Mathematical Literacy – First Results of the Longitudinal Study PALMA, Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4, 67-84.

Poucak 67.indd 12 19.10.2016. 13:21:18