Je li točno ili netočno?[1]

Jelena Gusić[2]

Pri vrednovanju se često postavlja pitanje točnosti rješenja, odnosno ispravnosti postupka. Unatoč raširenom mišljenju da je u matematici odgovor ili točan ili netočan, nije rijedak slučaj da je teško donijeti odluku o točnosti nekog odgovora. Odluka prvenstveno ovisi o kriterijima po kojima, u skladu s ishodima, odgovore prihvaćamo kao točne, odnosno netočne. Te kriterije donosimo ovisno o definiciji matematičkog pojma koji se pojavljuje u zadatku te o razini njegove usvojenosti. Moramo biti svjesni da kod prvog susreta s nekim pojmom definicije mogu biti specijalnije i nedovoljno stroge, a svojstva suženog dosega. Tako je, recimo, u prvim razredima osnovne škole umnožak uvijek veći od pojedinog faktora i tek proširenjem skupa brojeva učenici uočavaju da nije tako. Slično, u cijeloj osnovnoj školi kvadrat broja ne može biti negativan.

Pogledajmo nekoliko primjera:

Rješenje nejednadžbe

Zadatak: Riješite nejednadžbu $x - 4 \cdot \log_2 3 < x \cdot \log_2 3 - 7$.

Mada najvjerojatnije učenicima na prvi pogled ne izgleda tako, ovo je linearna nejednadžba. Stoga od učenika očekujemo da pokaže znanje rješavanja linearnih nejednadžbi.

$$\begin{aligned} & x - 4 \cdot \log_2 3 < x \cdot \log_2 3 - 7 \Rightarrow \\ & x - x \cdot \log_2 3 < 4 \cdot \log_2 3 - 7 \Rightarrow \\ & x(1 - \log_2 3) < 4 \cdot \log_2 3 - 7 \end{aligned}$$

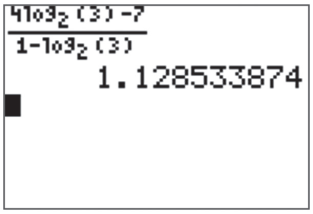
Kako je koeficijent uz x negativan, to dijeljenje s njim mijenja znak nejednakosti $x\left(1-\log_2 3\right) < 4\cdot\log_2 3 - 7 \quad /{:}\ \left(1-\log_2 3 < 0\right)$ te dobivamo rješenje:

$$x > \frac{4\cdot\log_2 3-7}{1-\log_2 3}$$

[1]Jelena Gusić, XV. gimnazija, Zagreb

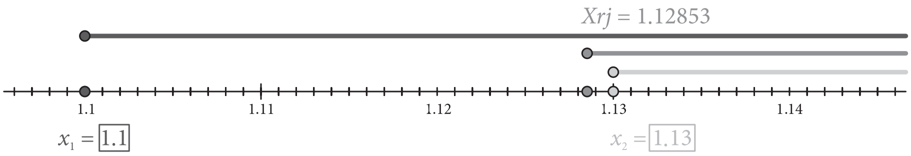
[2]Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 29. 6. 2016.

Ovako prikazano rješenje je točno[3]. Međutim, vjerojatno mnogi učenici ne vide da je tu kraj rješavanju zadatka, da je to rješenje (ne nalikuje uobičajenim rješenjima nejednadžbe). Mnogi nisu sigurni da je takvo rješenje prihvatljivo i pitaju se hoćemo li im reći da nisu „sredili" do kraja. Stoga očekujemo daljnje računanje:



Slika 1.

i potom prikaz rješenja zaokružen na jednu decimalu $\boxed{x > 1.1.}$, odnosno na dvije decimale $\boxed{x > 1.13}$.



Slika 2.

Iz grafičkog prikaza ta tri „rješenja“ vidi se da pri zaokruživanju na jednu decimalu dodajemo rješenja $x \in \langle 1.1, 1.28533874...]$, a pri zaokruživanja na dvije decimale gubimo rješenja $x \in \langle 1.128533874...,1.13]$. U drugom slučaju bilo bi točnije da smo rješenje zapisali kao $x \geq 1.13$ jer je 1.13 jedno rješenje nejednadžbe (koje smo, uz ostale vrijednosti, izgubili zaokruživanjem). Približna rješenja ove nejednadžbe jako se razlikuju od točnog rješenja. Ukoliko je učenik već ranije zamijenio logaritme približnim vrijednostima, njegov će se odgovor vjerojatno još više razlikovati. U ovom zadatku provjeravamo učenikovo znanje rješavanja linearnih nejednadžbi pa bismo prihvatili kao točne i odgovore nastale takvim zaokruživanjem.

Usporedimo prethodnu nejednadžbu s nejednadžbom $x^2 < 1$. Postupak je: $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$. U ovom tipu zadataka često tražimo od učenika da rješenje zapiše koristeći intervale (razlog tome je njihova neprecizna uporaba veznika i i ili). Odgovor $x \in [-1, 1]$ ne prihvaćamo kao točan, mada je, u usporedbi s prethodnim zadatkom, učenik dodao samo dva broja.

Ukoliko želimo da učenik kritički razmišlja o svojim odgovorima i da kvalificirano donosi odluke (kako zapisati rješenje), svakako bi bilo dobro na nastavi raspravljati o ovim slučajevima. Također je važno da učenici razumiju važnost razlike između nejednakosti i stroge nejednakost pa je dobro da prepoznaju primjere u kojima se

[3]Točno (egzaktno) ovdje se upotrebljava kao suprotnost od približno, a ne suprotnost od netočno.

to razlikuje. Primjerice: ako je učenikova srednja ocjena veća ili jednaka 4.5, onda mu je uspjeh odličan; ako je iznos kupnje veći od 400 kn, onda dobije popust na tu kupnju. Na takvim se primjerima vidi zašto je u postavljanju nejednakosti bitno je li ona stroga ili ne, pa time učenici osvješćuju važnost točnog zapisa rješenja nejednadžbe.

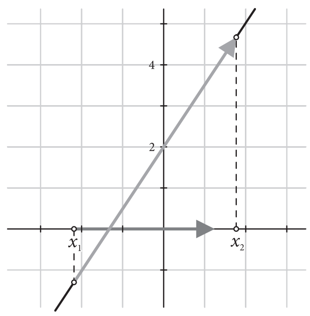
Interval rasta/pada funkcije

Pogledajmo najprije par definicija rastuće funkcije:

- Funkcija f je rastuća na intervalu I ako je $f(b) \geq f(a)$ za sve $b > a$, gdje je $a, b \in I$.[4]
- Rastuća funkcija je funkcija koja većoj vrijednosti argumenta pridružuje vrijednost koja je veća od one koju pridružuje manjoj vrijednosti argumenta ili joj je jednaka.[5]
- Funkcija f je rastuća ili uzlazna na intervalu $A \subseteq D$ ako
$$\left(\forall x_1, x_2 \in A\right)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$$ [6]

Dakle, rast/pad funkcije definira se na intervalu iz domene. To je svojstvo podskupa domene, a ne elementa iz domene.

Prvi primjer s kojim se učenici susreću već u osnovnoj školi je primjer linearne funkcije na čijem je grafu jednostavno vidjeti što znači da funkcija raste.



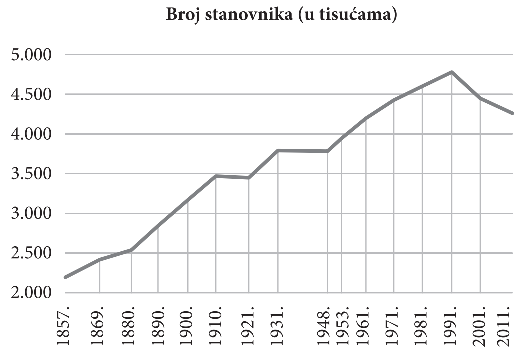
Slika 3.

Bilo bi dobro tada promatrati i neke grafove iz svakodnevnog života na kojima učenici vide na kojim je dijelovima prikazano obilježje rastuće odnosno padajuće funkcije (primjerice graf koji pokazuje broj stanovnika Hrvatske na *Slici 4.*). Takvi primjeri služili bi za uvježbavanje argumentiranja o rastu/padu, odnosno za usvajanje definicije da je funkcija rastuća ako se s povećanjem vrijednosti argumenta povećavaju i vrijednosti funkcije.

[4] http://mathworld.wolfram.com/IncreasingFunction.html: A function $f(x)$ increases on an interval I if $f(b) \geq f(a)$ for all $b > a$ where $a, b \in I$.

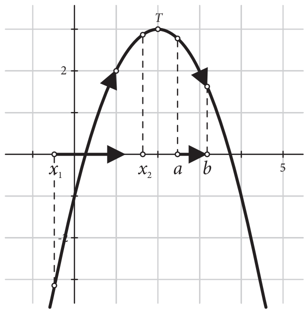
[5] http://struna.ihjj.hr/naziv/rastuca-funkcija/32373/#naziv

[6] http://lavica.fesb.hr/mat1/predavanja/node73.html



Slika 4: http://www.croatia.eu/article.php?lang=1&id=14

Sljedeći primjer s kojim se susrećemo u nastavi je kvadratna funkcija. To je prva funkcija koja nije monotona, pa se prvi put postavlja pitanje određivanja intervala na kojemu je funkcija rastuća/padajuća. Također, tu bi učenici trebali naučiti da pod tim želimo znati najveći interval na kojemu je neka funkcija, primjerice, rastuća.



Slika 5.

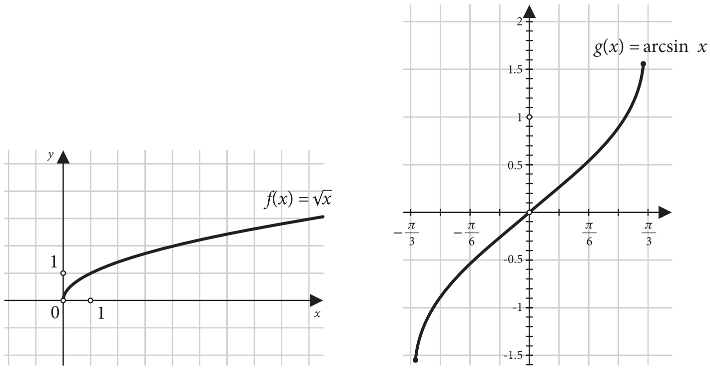
Vidimo da prikazana kvadratna funkcija najprije raste pa potom pada, i uočavamo točku $T(2, 3)$ u kojoj funkcija prelazi iz područja rasta u područje pada. Ako tražimo najveći podskup domene na kojem je funkcija rastuća, tada je, u skladu s definicijom:

$$x_1, x_2 \in \langle -\infty, 2] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

pa je interval $\langle -\infty, 2]$ područje na kojemu funkcija raste.

Kako želimo da učenici usvoje pojam rasta/pada, ne treba inzistirati na uključivanju krajnje točke intervala, pa bi u ovom zadatku trebalo prihvatiti kao točno i rješenje $\langle -\infty, 2]$ i $\langle -\infty, 2\rangle$.

Argumenti pri odlučivanju o rastu i padu najčešće se donose iz grafičkog prikaza. Stoga učenicima treba olakšati usvajanje točke za koju vide da u njoj funkcija niti raste niti pada, u interval rasta/pada. Tome može pomoći diskusija o rastu/padu nekih drugih funkcija. Pogledajmo funkcije čiji su grafovi prikazani na slikama. Na kojemu su intervalu te funkcije rastuće?



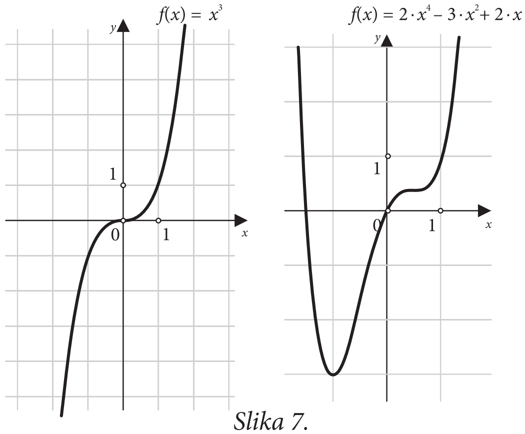
Slika 6.

Obje su funkcije rastuće na cijeloj domeni.

Dakle, funkcija $f:\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$, $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ je rastuća na intervalu $[0, +\infty\rangle$, a funkcija $g:\left[-1,1\right]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g\left(x\right)=\arcsin x$ na intervalu $[-1, 1]$. Dok je učenicima vjerojatno prihvatljivo da korijen raste od 0, to je teže prihvatiti da arcsin raste u 1. Ako se sjetimo definicije rasta, onda znamo da rast nije povezan s „točkom", a i doista ne bi bilo logično reći da funkcija arcsin ne raste na cijeloj domeni (ukoliko bismo izbacili 1). Dodatnu će „zbrku" unijeti i derivacije i svojstvo koje kaže da je funkcija rastuća ako je derivacija pozitivna[7], pa bi samim time stacionarne točke bile izbačene. Argument za suprotno daju nam primjeri funkcija $f\left(x\right)=x^3$ i $g\left(x\right)=2x^4-3x^2+2x$ čiji su grafovi prikazani na *Slici 7*. Funkcija *f* je rastuća na cijeloj domeni unatoč tome što je $f'\left(0\right)=0$, a funkcija *g* na intervalu $[-1, +\infty\rangle$ unatoč tome što je $f'\left(-1\right)=0$ i $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Dok je pojam rasta/pada funkcije dosta jasan, to se interval na kojemu funkcija raste/pada vrlo različito shvaća. U literaturi se mogu naći slučajevi u kojima se krajnje točke intervala uključuju, a i slučajevi u kojima se isključuju. Stoga pri određivanju područja rasta/pada funkcije nema potrebe za krutost i inzistiranje na jednome od ta dva pravila.

[7]Funkcija *f* je rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Dakle, zbog prirode derivacije tvrdnja govori o otvorenom intervalu.



Slika 7.

Je li točan/prihvatljiv postupak?

Zadatak: Odredite cos *x* ako je $\sin x = -\frac{1}{3}$ i ako je $x \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

Očekivano rješenje:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$

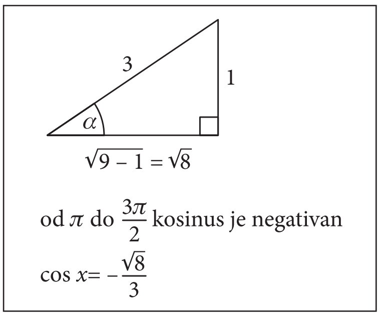
Kako je *x* iz trećeg kvadranta, to je kosinus negativan, pa je rješenje $\cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Ovim zadatkom ispitujemo zna li učenik

- osnovni trigonometrijski identitet,
- da postoje dva broja s istim kvadratom,
- da je kosinus u trećem kvadrantu negativan,

stoga nam je postupak prihvatljiv ako se iz njega vide ta znanja. Također bi nam trebao biti prihvatljiv i bilo koji postupak kojim se dobiva točno rješenje (uz uvjet da točno rješenje nije slučajno dobiveno ili da je posljedica pogrešaka).

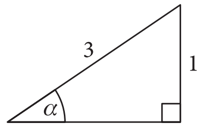
Je li prihvatljivo sljedeće rješenje?



Slika 8.

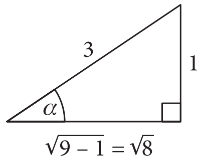
Što je učenik ovim pokazao?

- Ako je $\sin x = -\frac{1}{3}$ i $x \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, onda postoji α iz prvog kvadranta takav da je $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.
- U pravokutnom trokutu kojemu je hipotenuza 3, a kateta 1, sinus šiljastog kuta nasuprot toj kateti jednak je $\frac{1}{3}$.



Slika 9.

- Drugu katetu tog trokuta možemo izračunati prema Pitagorinu poučku, pa je kosinus tog šiljastog kuta jednak $\cos\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$.



Slika 10.

- Kosinus odgovarajućeg kuta iz trećeg kvadranta je negativan, pa je $\cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Na prvi pogled rješenje nije izgledalo dovoljno dobro da bismo ga ocijenili boljom ocjenom, ali ako pogledamo pozadinu tog postupka, vidi se da učenik zna kako iz zadanog sinusa dobiti točan kosinus, pa bismo ovo rješenje trebali prihvatiti. Uočimo da učenik nije napisao kako su vezani x i α, što bismo za odličnu ocjenu voljeli vidjeti ($\alpha = x - \pi$), međutim već uvođenje nove oznake α u pravokutni trokut pokazuje da je učenik svjestan da se ne radi o istom kutu (broju), pa bi i to u pismenom obliku moglo biti dovoljno.

Prikazani postupak ekvivalentan je algebarskom. Tu ekvivalenciju neki ističu i nazivom, pa se jednakosti $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ i $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ nazivaju *Pitagorini identiteti*. Učenicima je ovaj način najčešće prihvatljiviji i brži, i ostavlja im više vremena da razmišljaju i kontroliraju predznak rješenja.

Vidimo da primjenjujemo različite kriterije pri prihvaćanju točnosti nekih rješenja i postupaka. Nama su ti kriteriji jasni i možemo ih obrazložiti. Učenici, nasuprot tome, vrlo često ne vide razliku u rješenjima i nije im jasno zašto smo nešto prihvatili kao točno, a nešto ne. Stoga je važno diskutirati o tome i dopustiti učenicima da argumentiraju svoja mišljenja i odluke. Također, iako je važno da učenik intuitivno poznaje pojmove, treba naglasiti važnost formalnog poznavanja pojmova i oznaka, i na njima inzistirati.