Test vertikalnog i test horizontalnog pravca

BRANKA GOTOVAC*

Uvod

Neposredan rad s učenicima/studentima, direktan rad u nastavi, „na terenu", živ je, dinamičan, u vječnom kretanju. Nužno je učenike pratiti, osluškivati, propitivati, čuti, kako bismo mogli djelovati, po potrebi i korigirati učenike, stavljajući ih u situacije da sami otkriju vlastite zablude i pogreške.

Tako su i nastali interaktivni nastavni materijali izloženi u radu kako bi se studentima[1], do nedavno srednjoškolcima, pomoglo da razjasne pojam grafa funkcije i konceptualno razumiju ono što iz grafa iščitavaju.

Središnja tema nastavnih materijala je test vertikalnog i test horizontalnog pravca. Materijali se mogu učenicima dati nakon iskazane (i zapisane) definicije grafa funkcije i diskusije (neka su pitanja za moderiranje diskusije navedena).

Nada je autorice da će izloženi materijali nastavnicima biti korisni u praksi, kao i pri izradi vlastitih nastavnih materijala za obradu sadržaja vezanih za funkcije.

Kad olovka „pobjegne"

Što je otkrio jedan jednostavni zadatak dan brucošima KTF-a u Splitu, pet tjedana nakon početka nastave?

Analizirat ćemo dio zadatka, odnosno grafove funkcija $\log_{\frac{3}{2}} x$ i $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ koje su studenti skicirali, i to samo ona njihova rješenja, „zamalo" dobra, kao na slikama 1 – 3. *Zašto graf nije dobar*, znaju upitati u takvim slučajevima, nesvjesni veličine pogreške koju su napravili. Obratit ćemo pažnju dakle na početak i kraj krivulja koje su skicirali.

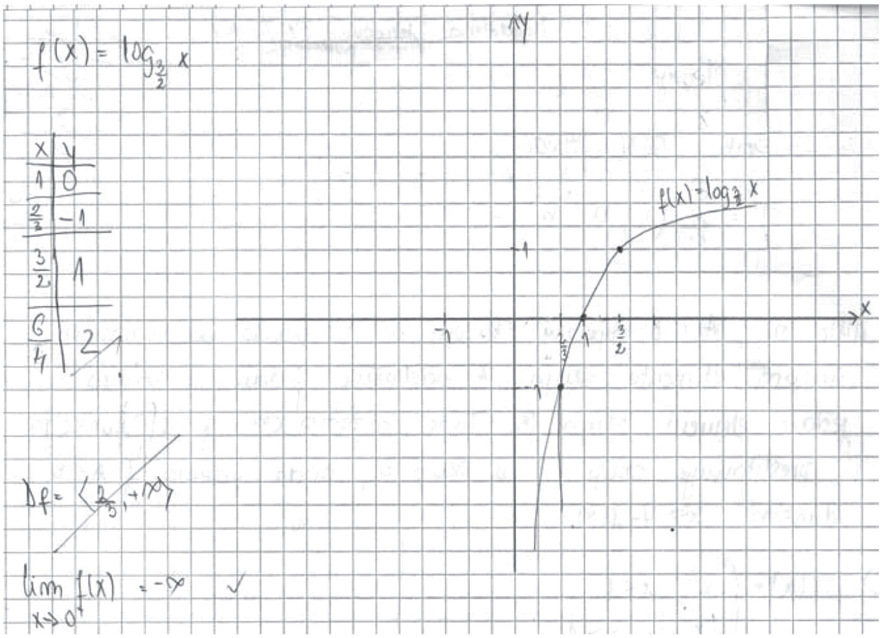
Na slici 1. može se uočiti dio krivulje paralelan s osi *y*, i korekcija koju je nacrtao nastavnik (dio krivulje za $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$). Na slici 2. vidi se uzlazni dio krivulje (nacrtao

*Branka Gotovac, Sveučilište u Splitu Kemijsko-tehnološki fakultet

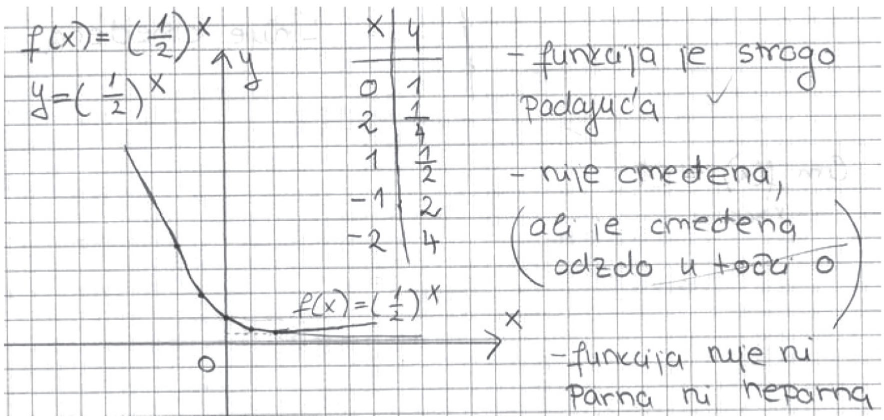
[1]studenti prve godine Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu (preddiplomski studiji)

student) i neposredno ispod njega silazni dio (korekcija nastavnika). Na posljednjoj slici (sl. 3) može se zapaziti dio krivulje (početak) koji je student blago odmaknuo od *y* osi i koji se gotovo stapa s korekcijom nastavnika (u originalu su uočljiviji jer se razlikuju po boji). Na istoj slici uočimo i završetak nacrtane krivulje.

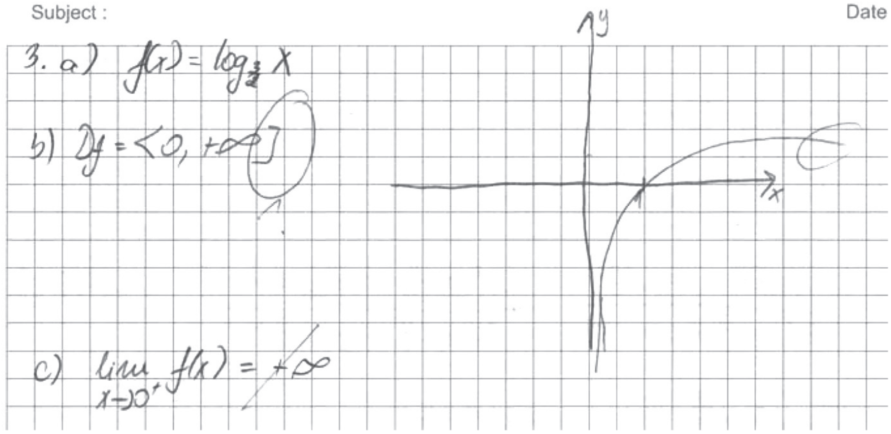
Je li krivulja na slici 1. graf funkcije? Je li krivulja na slici 3. graf funkcije? Prema grafu funkcije nacrtanom na slici 2. možemo li reći da je funkcija injektivna? Usporediti nacrtani graf s tvrdnjom koja je napisana: *funkcija je strogo padajuća*.



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Stručno oko nastavnika uočit će još pogrešaka na ovim slikama. Svaka je takva pogreška i nastavniku i učeniku prilika za rast i promjene. Za nastavnika je izazov da u traženju rješenja problema kako pomoći učeniku iziđe izvan uobičajene zone poučavanja.

Na pogrešku svog učenika pri rješavanju zadatka dobar nastavnik... improvizirat će primjer koji na jednostavan način demonstrira što je to učenik previdio pri zaključivanju ili kontraprimjer po kojem se ovaj može uvjeriti da je u nečemu bio u zabludi [1, str. 28].

Opis nastavnih materijala i sugestije za korištenje

Materijali se sastoje od dva dijela: prvi dio je graf funkcije, a drugi realna funkcija realne varijable. Prvi dio sadrži šest zadataka. U drugom zadatku ovog dijela korišten je zadatak iz članka *Putovanje Londonom kroz četiri zadatka* objavljen u časopisu Poučak [2]. U tom *se zadatku na zabavan način ispituje razumijevanje definicije funkcije i uči, preko dijagrama, kroz razne situacije nastale poigravajući se slikarima i njihovim slikama* [2, str. 54]. Elementi domene su slavni slikari, a kodomene njihove slike izložene u londonskoj Nacionalnoj galeriji.

Možda će pri rješavanju zadatka 5. neki učenici trebati nastavnikovu pomoć (sugestije za upute učenicima dane su u materijalima). Ostale zadatke iz ovog dijela učenici mogu izraditi samostalno.

Drugi dio također sadrži šest zadataka. U zadatku 7. potrebno je voditi i usmjeravati učenike prema ideji testa vertikalnog pravca. Tako je i u zadatku 10. kroz koji se učenici upoznaju s testom horizontalnog pravca. Ostali zadaci predviđeni su za samostalan rad učenika.

Uvodna riječ nastavnika i diskusija s učenicima prethode izradi zadataka prvog i drugog dijela (teoretska osnova dana je na početku svakog dijela).

Materijali izloženi u radu temeljeni su i dijelom preuzeti iz nastavnih materijala namijenjenih studentima prve godine Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu [3]. Pogodni su za rad u paru odnosno u grupi.

Učinkovitost materijala bit će to veća što je i pristup učenika prema stvaranju vlastitog znanja odgovorniji; adekvatna priprema za sat[2] i odgovoran rad u paru (grupi). Podrazumijeva se da nastavnik u ovom procesu prati učenike, provjerava ispravnost riješenih zadataka i intervenira ako je potrebno.

Zadnji zadatak preuzet je iz zbirke zadataka otvorenog tipa proizašle iz uradaka studenata Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu nastalih u okviru dvaju sukcesivnih projekata realiziranih kroz dvije akademske godine [4]. Temu zadatka 12 (test vertikalnog pravca) student[3] je sam odabrao, osmislio zadatak i riješio ga, pri čemu su uvjeti projekta za koji je napravljen bili zadovoljeni. Zadatak je vrlo zanimljiv, dinamičan, maštovito riješen i ilustriran. Vidljivo je da je student uložio vrijeme i trud[4] prepustivši se zanosu igre stvaranja.

U finalnom dijelu sata nastavnik može zadati učenicima da osmisle zadatak (zadatak 13.) za svog partnera (rad u paru) odnosno susjeda recimo zdesna (rad u grupi). Poželjno je da nastavnik zadatke s rješenjima u miru pogleda kod kuće te da ih na sljedećem satu prokomentira (to može biti i nit vodilja za "režiranje" sljedećeg nastavnog sata).

Interaktivni nastavni materijali

I. Graf funkcije

Navedimo najprije definiciju grafa funkcije.

Definicija (graf funkcije): Graf funkcije $f : A \to B$ je skup

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y = f(x)\}.$$

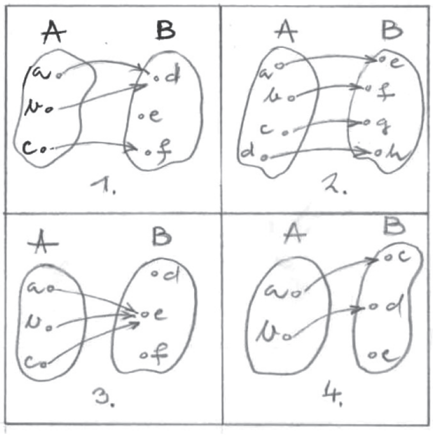
Kako bi učenici pojam grafa funkcije što bolje razumjeli, važno je nakon iskazane i zapisane definicije učenicima postaviti pitanja poput:

Koja je oznaka za graf funkcije? Je li graf funkcije skup? Što su elementi toga skupa? Odakle je prva komponenta uređenog para, odnosno kojem skupu pripada? Obrazloži kako je određena druga komponenta uređenog para ako je prva komponenta toga para neki $x \in A$.

Nakon diskusije, učenici bi s lakoćom trebali riješiti sljedeće zadatke.

[2]ponoviti pojmove funkcije i injekcije (surjekcije i bijekcije)
[3]Denis, student Preddiplomskog studija kemije
[4]ponudio je čak dvije varijante slika; odabranu (slike s krivuljama crtanim na papiru) i drugu (krivulje na prozirnim folijama)

Zadatak 1. Na slici 1.1 dani su dijagrami funkcija. Za svaki dijagram funkcije odrediti graf funkcije.



Slika 1.1.

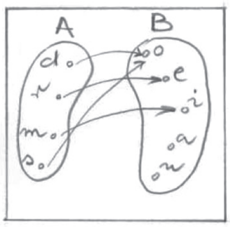
Rješenje: Označimo s f_i funkciju predstavljenu dijagramom i (i = 1, 2, 3, 4).

Graf funkcije $f_1:\{a,b,c\}\to\{d,e,f\}$ je skup $\Gamma_{f_1}=\{(a,d),\,(b,d),\,(c,f)\}$;
graf f $f_2$cije $f2:\{a,b,c,d\}\to\{e,f,g,h\}$ je skup $\Gamma_{f_2}=\{(a,e),\,(b,f),\,(c,g),\,(d,h)\}$;
graf funkcije $f_3:\{a,b,c\}\to\{d,e,f\}$ je skup $\Gamma_{f_3}=\{(a,e),\,(b,e),\,(c,e)\}$;
graf funkcije $f_4:\{a,b\}\to\{c,d,e\}$ je skup $\Gamma_{f_4}=\{(a,c),\,(b,d)\}$.

Zadatak 2. U prethodno spomenutom članku *Putovanje Londonom kroz četiri zadatka,* u zadatku 2. za svaku od funkcija ispisati pripadajući graf funkcije.

Zadatak 3. Graf funkcije $g:\{d, r, m, s\}\to\{o, e, i, a, u\}$ je skup $\Gamma_g=\{(d, o), (r, e), (m, i), (s, o)\}$. Nacrtati dijagram funkcije g.

Rješenje: Dijagram funkcije g prikazan je na slici 3.1.



Slika 3.1.

Zadatak 4. Zadan je graf funkcije $\Gamma_f=\{(č, o), (k, o), (l, a), (d, i), (c, e)\}$. Odrediti domenu i sliku funkcije.

Rješenje: Domena funkcije je skup $A=\{č, k, l, d, c\}$, a slika funkcije skup $R_f=\{a, e, i, o\}$

Zadatak 5. Neka je zadan skup uređenih parova, i neka su uređeni parovi (a, b) i (a, c) njegovi elementi. Može li takav skup biti graf funkcije? Obrazložiti.

Rješenje: Uputimo li učenike da se pomognu dijagramom i da elemente a, b i c smjeste u odgovarajuće skupove – u „polazni skup" A i „dolazni skup" B – lakše će uočiti da elementu $a \in A$ pridružujemo dva elementa iz B (a ne jedan i samo jedan element!).

Takvo pridruživanje nije funkcija pa ne možemo govoriti o grafu funkcije. Dakle, takav skup ne može biti graf funkcije.

Zadatak 6. Neka je graf funkcije $f: \{a, b, c\} \to \{d, e\}$ skup $\Gamma_f = \{(a, d), (b, e), (c, e)\}$. Je li funkcija f injekcija? Obrazložiti.

Rješenje: Elementima b i c iz skupa $A = \{a, b, c\}$ pridružen je isti element e iz skupa $B = \{d, e\}$. Dakle, funkcija f nije injektivna.

II. Realna funkcija realne varijable

Definicija (realna funkcija realne varijable): Za funkciju $f: A \to B$ kažemo da je realna funkcija realne varijable ako su skupovi $A, B \subseteq R$.

Možemo je zadati tablično, analitički (pravilom, formulom) i grafički. Ilustrirajmo primjerima.

Primjer 1. Funkcija zadana tablično: $f: \{0, 1, 3, 6, 7, 11\} \to R$,

x	0	1	3	6	7	11
$f(x)$	-3	0	10	-1	2	1

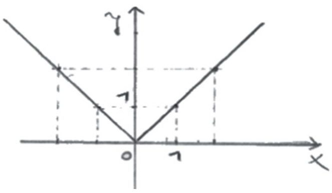
Primjer 2. Analitički zadana funkcija: $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Što je domena, a što kodomena tako zadanih funkcija? Ako nije drugačije rečeno, podrazumijeva se da je:

– *domena najveći podskup skupa R za koji taj izraz ima smisla (svi $x \in R$ za koje je $f(x) \in R$); taj skup zovemo <u>prirodno područje definicije</u> i označavamo s $D(f)$ ili D_f,*
– *kodomena je cijeli skup R.* [3, *str.*30]

U našem je slučaju $D_f = [1, +\infty)$.

Primjer 3. Krivulja na slici je graf funkcije $|x|$.



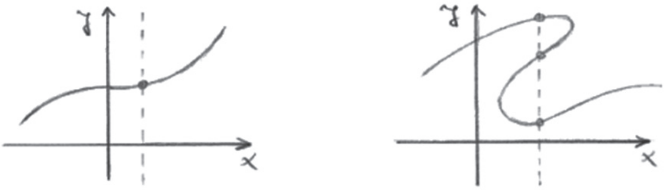
- Je li svaka krivulja u ravnini R^2 graf funkcije?

Zadatak 7. Neka je zadana krivulja k u ravnini R^2, i neka su točke $T_1(5, 3)$ i $T_2(5, 7)$ dvije točke na toj krivulji.[5] Je li krivulja k graf funkcije?

Rješenje: Uputimo li učenike da ponovno pogledaju zadatak 5, lako će zaključiti ($a = 5$, $b = 3$ i $c = 7$) da krivulja k nije graf funkcije.

U sljedećem koraku učenici bi trebali uočiti da točke T_1 i T_2 leže i na vertikalnom pravcu $x = 5$. Sada možemo reći da je dovoljno naći jedan vertikalni pravac koji krivulju siječe u više od jedne točke da bismo zaključili da krivulja nije graf funkcije. To je tzv. **t**est **v**ertikalnog **p**ravca. Da bi krivulja bila graf funkcije, ma koji je vertikalni pravac mora sjeći u najviše jednoj točki (**tvp**).[6]

Zadatak 8. Je li na slici 8.1 desno nacrtan graf funkcije? A na slici lijevo?[7]



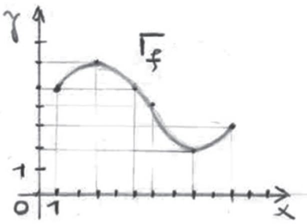
Slika 8.1.

- Kako pomoću grafa funkcije Γ_f odrediti D_f i R_f?

Pokažimo kako odrediti D_f s danog grafa funkcije Γ_f.

Napomena: Prije rješavanja sljedećeg zadatka poželjno je učenike uputiti da ponovno pogledaju zadatak 4.

Zadatak 9. Neka je zadan graf funkcije Γ_f (slika 9.1).



Slika 9.1.

[5] $R^2 = \mathrm{R} \times \mathrm{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{R} \wedge y \in \mathrm{R}\}$ primjer je Kartezijevog kvadrata. Prikazujući realne brojeve kao točke brojevnog pravca, R^2 možemo predočiti kao skup točaka koordinatne ravnine.

[6] Kako bismo drugačije mogli reći „više od jedne točke", a kako „u najviše jednoj točki"? Prodiskutirati!

[7] preuzeto iz [3, str. 37]

1) Ispitati istinitost tvrdnji $(1, 5) \in \Gamma_f$ T N

$(6, 4) \notin \Gamma_f$ T N

$(5, 1) \notin \Gamma_f$ T N

$(8, 2) \in \Gamma_f$ T N

$(0, 3) \in \Gamma_f$ T N

2) Pronaći točku na grafu s apscisom:

a) $x = \frac{7}{2}$ b) $x = \sqrt{2}$

3) Postoje li točke na grafu kojima su apscise:

a) $x \geq 15$ b) $x < \frac{1}{2}$

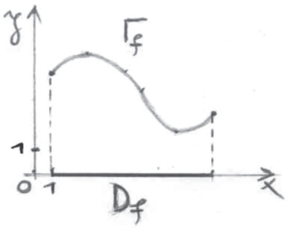
4) Za apscise točaka grafa vrijedi (popuniti prazna mjesta):

$\square \leq x \leq \square$, tj. $x \in [\cdot, \cdot]$.

Tako smo odredili domenu D_f.

Napomena: Nakon što svi učenici uspješno riješe zadatak 9, bilo bi ih dobro upitati: Kako biste svojim riječima opisali postupak određivanja domene s grafa funkcije?

Sada im možemo pokazati sliku 9.2 i reći da se skup D_f jednostavno „očita" s grafa nakon što odredimo ortogonalnu projekciju grafa funkcije na os x (u našem slučaju je to „podebljana" dužina)[8].



Slika 9.2.

Za određivanje slike funkcije R_f može se prilagoditi prethodni zadatak. U našem je zadatku $R_f = [2, 6]$ (domena je $D_f = [1, 10]$).

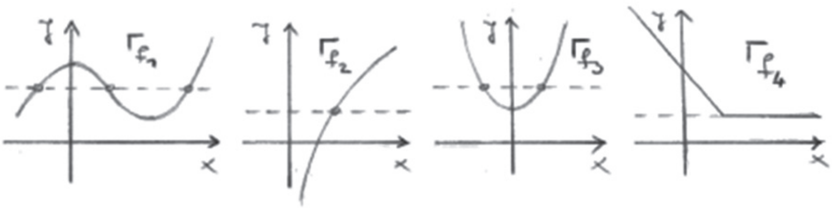
- Kako pomoću grafa funkcije Γ_f utvrditi je li neka funkcija injektivna?

Zadatak 10. Neka je zadan graf funkcije, i neka su točke $(-1, 3)$ i $(5, 3)$ dvije točke na tome grafu. Je li tako dana funkcija injektivna?

[8] u pravilu nije osobito istaknuta, nego se vizualizira

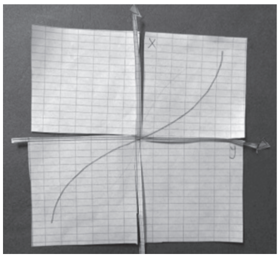
Rješenje: Uputimo li učenike (kao u zadatku 7.) da ponovno pogledaju zadatak 6, lako će zaključiti da funkcija nije injektivna. Naime, elementima –1 i 5 iz skupa A ($A \subseteq R$) pridružen je isti element iz skupa B ($B \subseteq R$). Kao i u zadatku 7, u sljedećem bi koraku učenici trebali uočiti da točke (–1, 3) i (5, 3) leže i na horizontalnom pravcu $y = 3$. Dovoljno je naći jedan horizontalan pravac koji graf funkcije siječe u više od jedne točke da bismo zaključili da funkcija nije injektivna. I to je tzv. **t**est **h**orizontalnog **p**ravca. Da bi funkcija bila injektivna, ma koji horizontalni pravac mora sjeći graf funkcije u najviše jednoj točki (**thp**).

Zadatak 11. Ispitati injektivnost danih funkcija (slika 11.1).[9]



Slika 11.1.

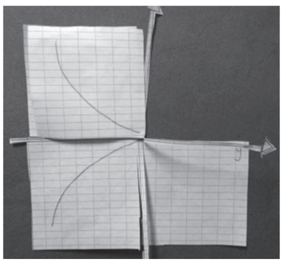
Zadatak 12. Na slici desno prikazan je graf funkcije x^3. Koliko ima krivulja dobivenih simetrijom dane krivulje ili jednog njezinog dijela (prema kvadrantu) s obzirom na koordinatne osi koje predstavljaju graf neke funkcije?



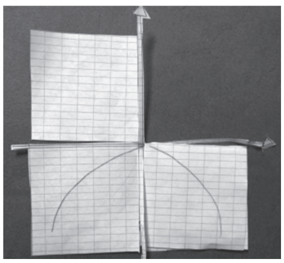
Je li krivulja, dobivena najprije simetrijom s obzirom na os y dijela zadane krivulje u 3. kvadrantu, pa onda rotacijom za 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke sata, graf funkcije?

Napomena: Krivulje dobivene transformacijom jednog dijela zadane krivulje sastoje se od transformiranog dijela i dijela krivulje koji je sačuvan.[10]

Rješenje:



Slika 12.1.

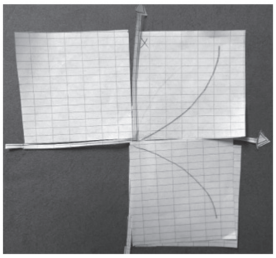


Slika 12.2.

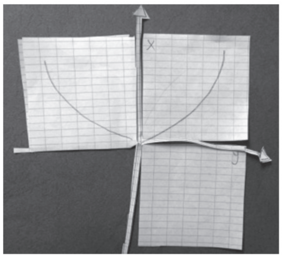
[9]preuzeto iz [3, str.38]

[10]zadatak s rješenjem preuzet iz [4, str.108,109]

1. Krivulja na slici 12.1 dobivena je simetrijom dijela krivulje $y = x^3$ u 1. kvadrantu s obzirom na os y. Prema **t**estu **v**ertikalnog **p**ravca krivulja na slici 12.1 nije graf funkcije.
2. Krivulja na slici 12.2 dobivena je simetrijom dijela krivulje $y = x^3$ u 1. kvadrantu s obzirom na os x. Krivulja na slici 12.2 je graf funkcije (**tvp**).

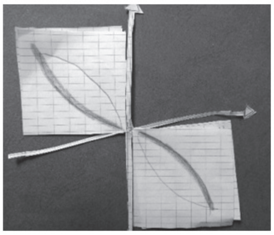


Slika 12.3.

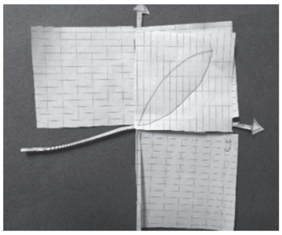


Slika 12.4.

3. Krivulja na slici 12.3 dobivena je simetrijom dijela krivulje $y = x^3$ u 3. kvadrantu s obzirom na os y. Promatrana krivulja na slici 12.3 nije graf funkcije (**tvp**).
4. Krivulja na slici 12.4 dobivena je simetrijom dijela krivulje $y = x^3$ u 3. kvadrantu s obzirom na os x. Krivulja na slici 12.4 je graf funkcije (**tvp**).



Slika 12.5.



Slika 12.6.

5. Na slici 12.5 promatramo deblje otisnutu krivulju („tanju” zanemariti!). Promatrana krivulja dobivena je simetrijom krivulje $y = x^3$ s obzirom na os y, odnosno os x, i ona je graf funkcije (**tvp**). Uočite da simetrijom obzirom na os y, grafa funkcije x^3 i grafa njoj inverzne funkcije, dobivamo upravo deblju i tanju krivulju.
6. Krivulja na slici 12.6 dobivena je simetrijom s obzirom na os y dijela krivulje $y = x^3$ u 3. kvadrantu, i nakon toga rotacijom za 90° u + smjeru. (Dio zadane krivulje u 1. kvadrantu je sačuvan.) Krivulja na slici 12.6 nije graf funkcije (**tvp**).[11]

Literatura:

1. Sedmak, S.: *Izbor zadataka u funkciji ciljeva obrazovanja*, Zbornik radova, 9. stručno-metodički skup učitelja i nastavnika matematike, Matematičko društvo Istra, Pula, (2015.) 28-32.
2. Gotovac, B.: *Putovanje Londonom kroz četiri zadatka*, Poučak, Hrvatsko matematičko društvo, Profil International d.o.o., Zagreb, 14 (54) (2013.) 44-55.
3. Gotovac, B.: *Matematika 1*, Kemijsko-tehnološki fakultet u Splitu, Split, 2015.
4. Gotovac, B.: *Matematički album-zbirka zadataka otvorenog tipa*, Kemijsko-tehnološki fakultet u Splitu, Split, 2015., str. 108, 109.

[11] „Zadatak iz riznice” možemo proširiti tako da primjenom testa horizontalnog pravca ispitamo injektivnost funkcija (slike 12.2, 12.4 i 12.5).