Platonova špilja u nastavi

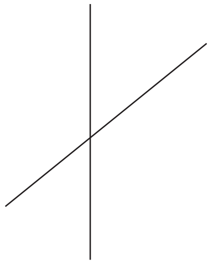
Petar Mladinić[1]

U VII. knjizi *Države*, u dijalogu između Sokrata i Glaukona, Platon kroz usta svoga učitelja Sokrata sintetizira mnoga od svojih učenja u arhetipskoj priči o špilji. Platon je opisao čovječanstvo kao skupinu ljudi u mračnoj špilji. Iza njih je otvor iz kojeg dolazi svjetlost. Ta svjetlost baca sjene na zid u koji ljudi gledaju. Kako ljudi izvan špilje možda nose neke stvari na glavi ili u rukama, tako sjene na zidu daju ljudima u pećini pogrješan dojam o vanjskome svijetu.

Na neki način, parafrazirajući način stvaranja dojma o vanjskome svijetu, možemo se zapitati daju li *sjene na zidu* učenicima pogrješan dojam o matematičkom pojmu. Mogu li učenici steći puni uvid u sadržaj pojma iz *sjena na zidu* tj. projekcija objekta na zidu? I koliko treba takvih *sjena na zidu* za „puni” pojam?

* * *

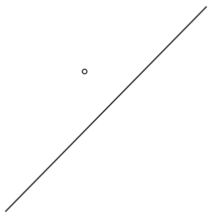
Primjerice, na slici 1. projekcije su dvaju pravaca.



Slika 1.

Što se može reći o ovim pravcima? Da se sijeku? Možda su mimosmjerni?

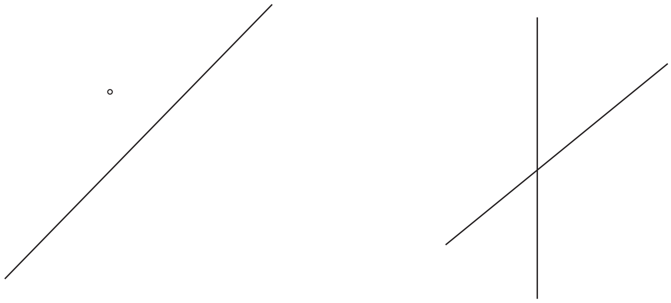
Koji su objekti projicirani na slici 2.? Točka i pravac? Dva pravca?



Slika 2.

[1]Petar Mladinić, Zagreb

Što se može zaključiti ako se istovremeno „vide” dvije ortogonalne projekcije (nacrt i tlocrt) (v. sl. 3.)?



Slika 3.

Što se može zaključiti o tijelu ako je projekcija (tlocrt) tijela kvadrat? Što se može zaključiti ako je slika na zidu (nacrt) krug, a što ako je *sjena na zidu* jednakostraničan trokut? Možete li opisati/nacrtati tijelo čiji je tlocrt krug, nacrt kvadrat, a bokocrt jednakostranični trokut?

* * *

U ovom tekstu ilustrirat ćemo kako uporaba računala i softvera *Sketchpad* danas omogućuje istraživanje i otkrivanje svojstava *Lissajous-Bowditchove krivulje* i njezine povezanosti s različitim matematičkim područjima.

I na ovom ćemo primjeru ilustrirati da proučavanje samo jedne *sjene na zidu* ne daje cjelovito znanje o složenijem (složenom/kompleksnom) pojmu.

Povijesno gledano, radi se o matematičkom 2D modelu harmoničkog gibanja. Uvođenjem treće parametarske jednadžbe poopćit ćemo model i vizualizirati prikaz na tzv. *aksonometrijskoj kocki*. Taj 3D model omogućit će nam pokazati da je *Eulerova spirala* poseban slučaj Lissajous-Bowditchove krivulje, a da su poznati 2D prikazi Lissajous-Bowditchove krivulje zapravo ortogonalne projekcije (tlocrt, nacrt i bokocrt) prostorne Lissajous-Bowditchove krivulje.

O Eulerovoj spirali i kako do nje „doći” pomoću metoda nacrtne geometrije može se pročitati u članku *Eulerova spirala* [3.]. U tome članku opisana je povezanost realne/Kartezijeve ravnine (tlocrtne ravnine), imaginarne ravnine (nacrtne ravnine), kompleksne/Gaussove ravnine (bokocrtne ravnine) i prikaza Eulerove spirale kao 3D modela skupa kompleksnih brojeva. Ortogonalne projekcije Eulerove spirale (u koordinatnim sustavima – pravokutnom i polarnom – grafovi su funkcije sinus) jesu 2D vizualizacije interpretacije kompleksnih brojeva.

Dakle, opisan je „globalni” pogled u kojemu se prepoznaje povezanost nekoliko područja matematike (koja se i inače segmentirano poučavaju u školskoj matematici).

Ovakvim pristupom i izgradnjom modela realizirana je pedagoška misao belgijske matematičarke **Frédérique Papy** (1921. – 2005.) da: *...matematiku treba poučavati tako da se smanji (sukladno uzrastu!) razina apstrakcije i ništa drugo!* Izvor te njezine misli je iskustvo koje je stekla u radu s djecom od 4 do 15 godina. Djecu staru 5-6 godina uspješno je poučavala (između niza stvari!) euklidsku i pseudoeuklidsku geometriju na „konstruiranom” modelu grada s ortogonalno postavljenim ulicama (slično New Yorku). Djeca su uspješno rješavala problem taksista i goluba u tom gradu.

* * *

Pogledajmo ova tri loga.

Slika 4.

Prvi je logo *The Australian Broadcasting Corporation*, drugi *The Lincoln Laboratory at MIT* i treći *The University of Electro-Communications Japan*.

Svaki logo je neka Lissajous-Bowditchova krivulja.

Francuski fizičar **Jules Antoine Lissajous** (1822. – 1880.) opisao je 1855. godine matematički model složenog harmonijskog gibanja. Taj model je graf sustava parametarskih jednadžbi

$$x = A\sin(at+\delta)$$
$$y = B\sin(bt)$$

Lissajous nije znao da je to već 1815. godine učinio američki matematičar **Nathaniel Bowditch** (1773. – 1838.) razmatrajući gibanje njihala.

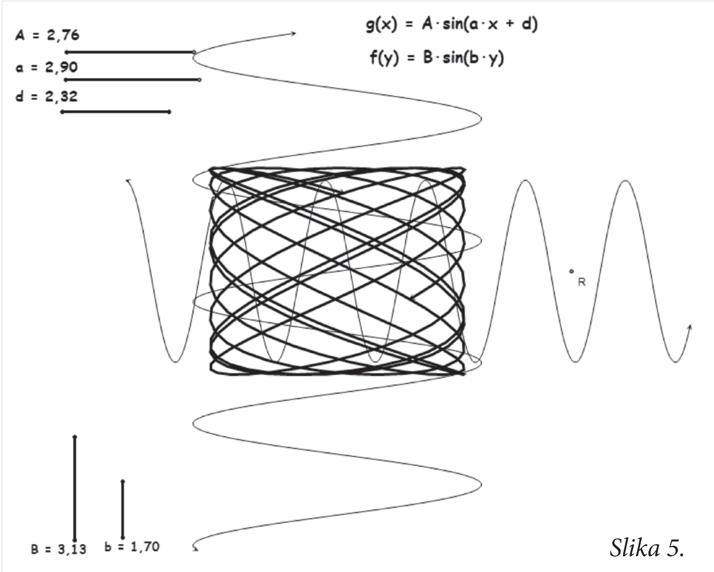
Lissajous-Bowditchova krivulja

Lissajous-Bowditchova krivulja skup je krivulja koje su definirane parametarskim jednadžbama.

a) U ravnini je definirana skupom parametarskih jednadžbi

$$\begin{cases} x(t) = A\cdot\sin(at+d) \\ y(t) = \quad B\sin(bt) \quad A, B, a, b, t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Ravninska 2D vizualizacija vidi se na slici 5.

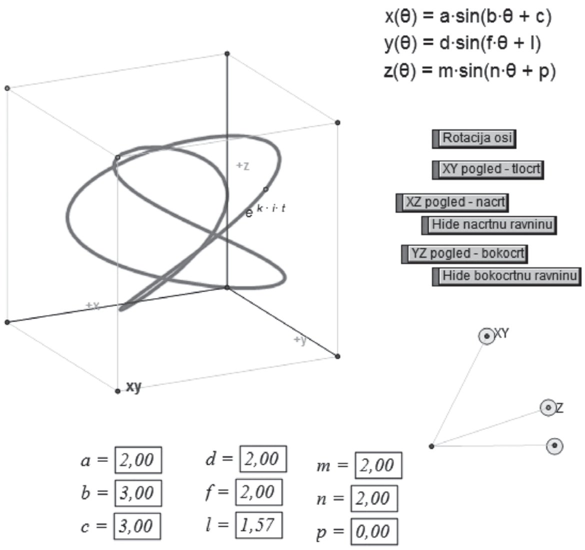


Slika 5.

b) U prostoru je definirana skupom parametarskih jednadžbi

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot \sin(b\theta + d) \\ y(\theta) = d \cdot \sin(f\theta + l) \\ z(\theta) = m \cdot \sin(n\theta + p), \quad a,b,c,d,f,l,m,n,p \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Prostorna 3D vizualizacija vidi se na slici 6.



Slika 6.

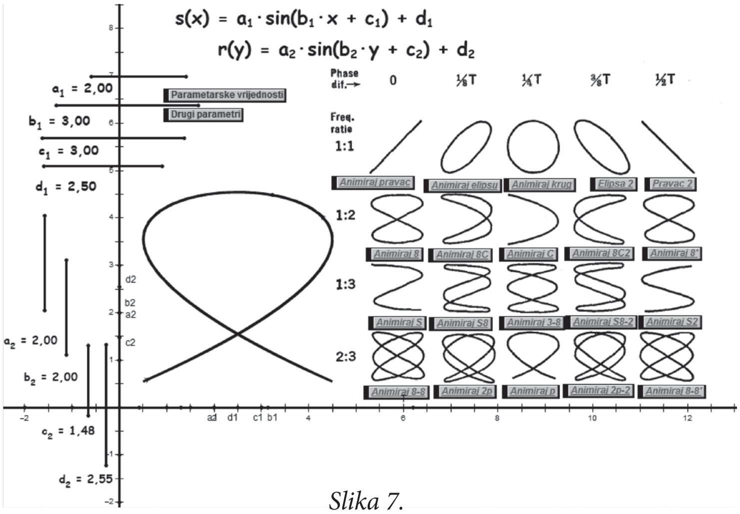
a) 2D vizualizacija

Pogledajmo različite prikaze Lissajous-Bowditchove krivulje i istražimo ulogu parametara u 2D vizualizaciji.

Zadatak 1. *Istražite za koje je vrijednosti parametara Lissajous-Bowditchova krivulja zatvorena.*

Rješenje. Krivulja je zatvorena kad je omjer parametara a i b racionalan.

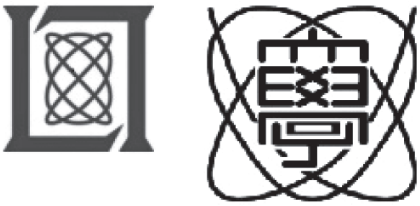
Nakon istraživanja i otkrivanja uloge parametara možemo uočiti da imamo „zanimljivih" 20 različitih prikaza (v. sl. 7.).



Slika 7.

Uočavamo da se u prvom retku tablice prikaza grafova nalaze objekti koji se proučavaju/poučavaju u analitičkoj geometriji (pravac, kružnica i elipsa) u srednjoj školi, a ostali prikazi ne!

Za $a = 4$, $b = 3$, $d = 0$ dobiva se logo Lincolnovog laboratorija na MIT-u (v. sl. 8. lijevo), a za $a = 5, b = 6, d = \dfrac{\pi}{2}$ Sveučilišta za elektro-komunikaciju u Japanu (v. sl. 8. desno).

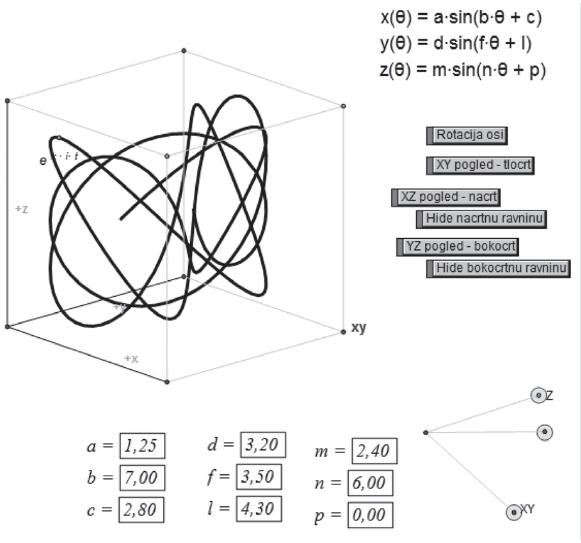


Slika 8.

b) 3D vizualizacija

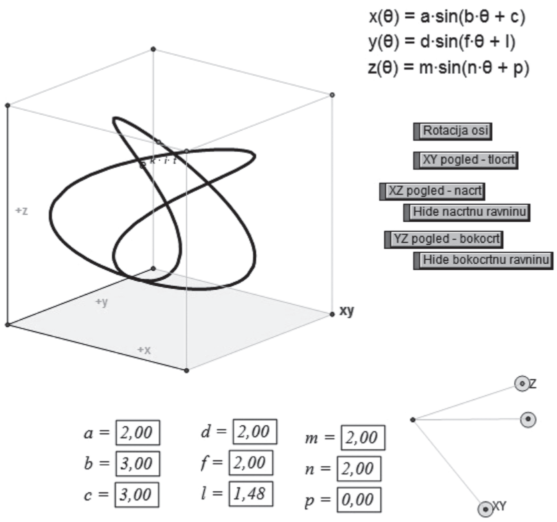
U slučaju triju parametarskih jednadžbi dobivamo Lissajous-Bowditchovu krivulju u prostoru.

Zadatak 2. *Na modelu aksonometrijske kocke istražite za koje je vrijednosti parametara Lissajous-Bowditchova krivulja zatvorena (v. sl. 9.).*



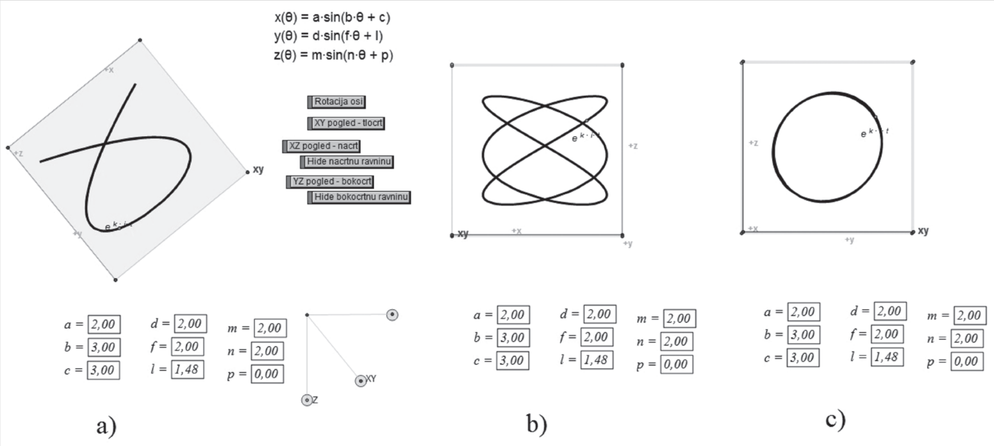
Slika 9.

Zadatak 3. *Na predlošku aksonometrijske kocke parametri su $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 2$, $f = 2$, $l = 1,48$, $m = 2$, $n = 2$, $p = 0$. Odredite tlocrt, nacrt i bokocrt ove prostorne krivulje.*



Slika 10.

Rješenje. Na slici 11.a) prikazan je tlocrt, na slici b) nacrt i na slici c) bokocrt.



Slika 11.

Na slici 11.a), b) i c) imamo 2D prikaze prostorne Lissajous-Bowditchove krivulje. To su „sjene objekata na zidu".

Zadatak 4. *Nalaze li se prikazi sa slike 11.a), b) i c) u tablici na slici 7.?*

Rješenje. Da! Prikaz na slici 11.a) je u 4. retku i 3. stupcu. Prikaz na slici 11.b) je u 4. retku i 1. (ili 5.) stupcu. Prikaz na slici 11.c). je u prvom retku.

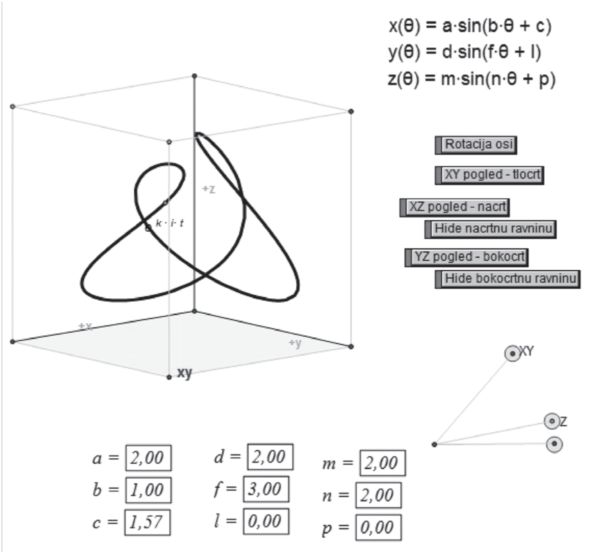
Zadatak 5. *Istražite i otkrijte za koje se vrijednosti parametara a, b, c, d, f, l, m, n i p dobivaju ostali prikazi na slici 7.*

Zadatak 6. *Za koje se vrijednosti parametara dobiva logo The Australian Broadcasting Corporation (v. sl. 12.)? Kako izgledaju tlocrt, nacrt i bokocrt ovog loga?*

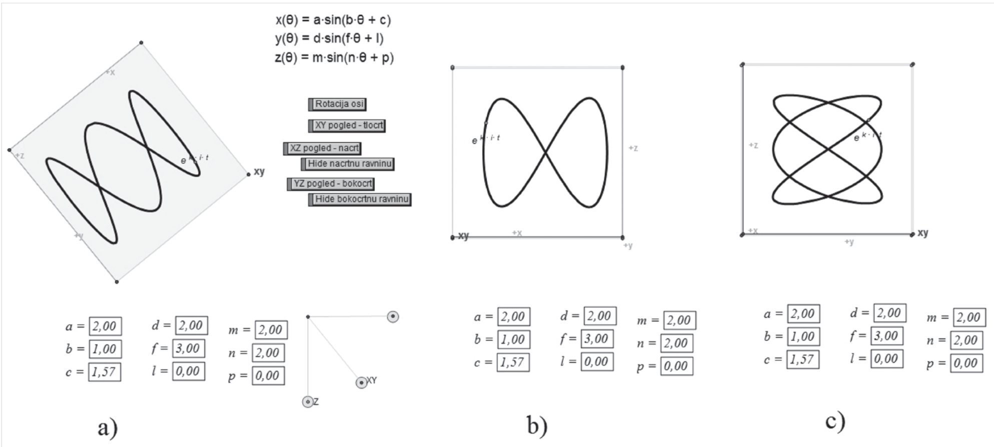
Slika 12.

Rješenje. Za $a = 2$, $b = 1$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 2$, $f = 3$, $l = 0$, $m = 2$, $n = 3$, $p = 0$ dobivamo spomenuti logo.

Tlocrt (v. sl. 14.a)) prikazan je u 3. retku i 3. stupcu, nacrt (v. sl. 14.b)) u 2. retku i 1. ili 5. stupcu, a bokocrt (v. sl. 14.c)) je u 4. retku i 1. ili 5. stupcu slike 7.



Slika 13.



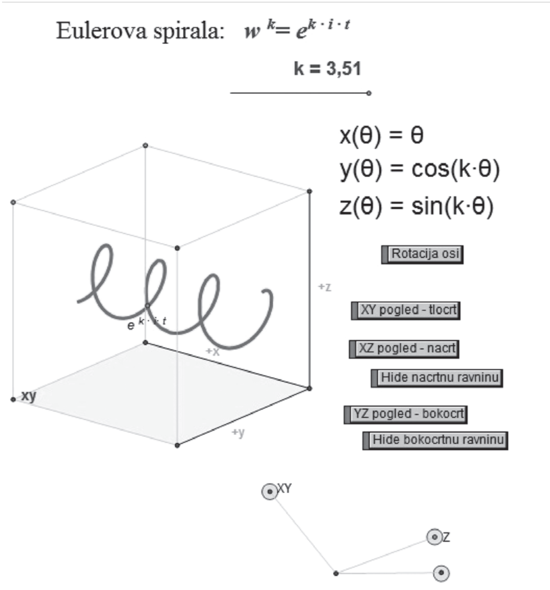
Slika 14.

Eulerova spirala

Eulerova spirala vizualizirana je na slici 15.

Ona je definirana parametarskim jednadžbama:

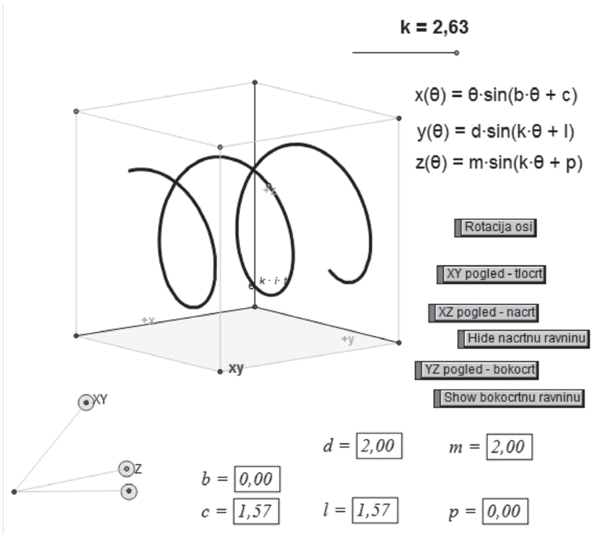
$$\begin{cases} x(\theta) & = & \theta \\ y(\theta) & = & \cos(k\theta) \\ z(\theta) & = & \sin(k\theta), \quad k,\theta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$



Slika 15.

Zadatak 7. *Za koje se vrijednosti parametara Lissajous-Bowditchove krivulje dobiva Eulerova spirala?*

Rješenje. Za $a=\theta, b=0, c=\frac{\pi}{2}, d=2, f=1, l=\frac{\pi}{2}, m=2, n=2, p=0$ dobiva se Eulerova spirala (v. sl. 16.).



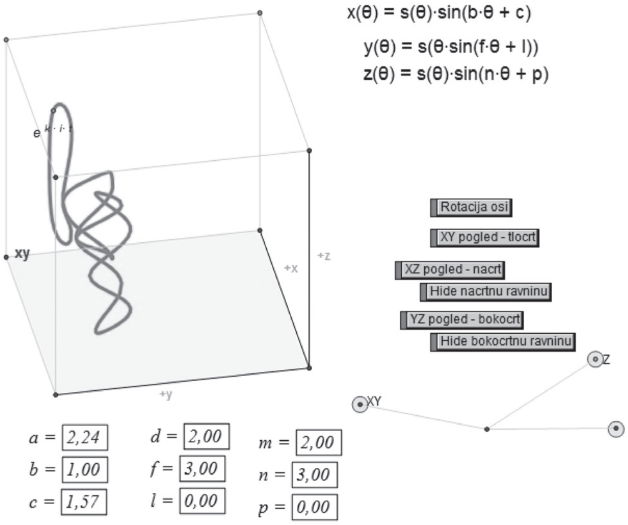
Slika 16.

Dakle, ovakvim pogledom na Lissajous-Bowditchovu krivulju uočava se da je Eulerova spirala jedan njezin poseban slučaj.

Daljnjim „kompliciranjem" možemo istražiti što se događa s Lissajous-Bowditchovom krivuljom (pa i s Eulerovom krivuljom) ako parametri kojima množimo trigonometrijsku funkciju sinus budu definirani pomoću temeljnjih elementarnih funkcija i njihove aritmetike i/ili komponiranja.

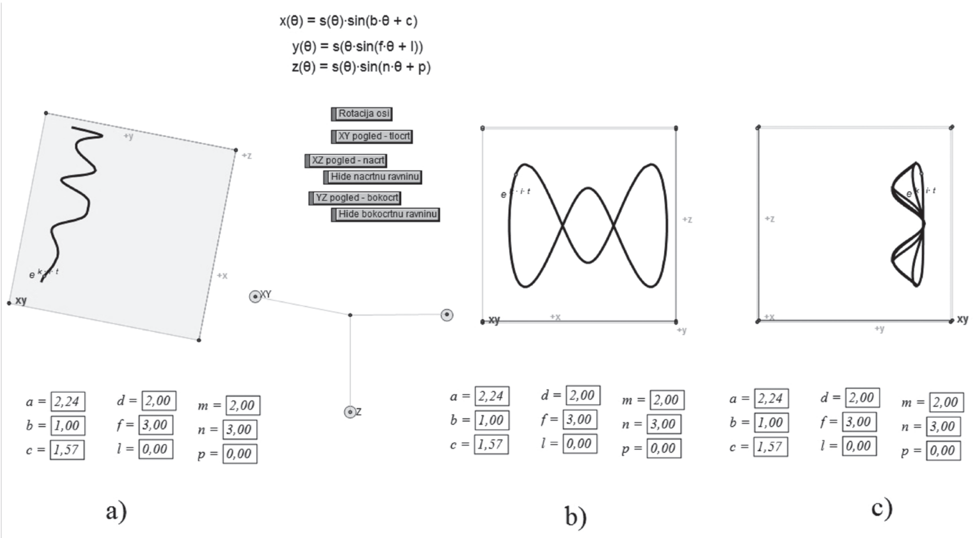
Primjera radi, (v. sl. 17.) nacrtajmo graf krivulje kad Lissajous-Bowditchovu krivulju pomnožimo funkcijom

$$s(\theta) = a \cdot \cos(\sin\theta)\ .$$



Slika 17.

Tlocrt, nacrt i bokocrt ove krivulje vide se redom na slikama 18.a), b) i c).

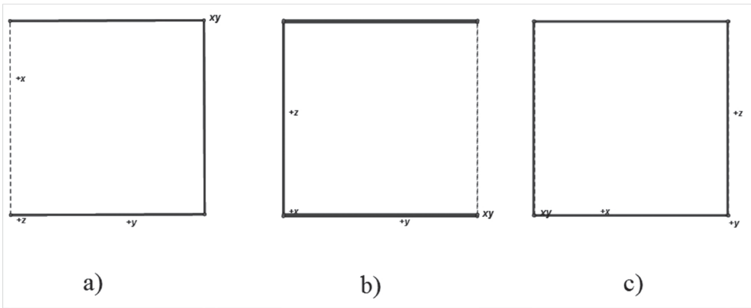


Slika 18.

Francuski matematičar **Gaspar Monge** (1746. – 1818.) shvatio je da u Platonovoj špilji trebaju, od istog objekta/predmeta, tri *sjene na zidu* koje su međusobno ortogonalne jer one mogu dati točan dojam o vanjskome svijetu, tj. objektu/predmetu. Tu je ideju ugradio u Nacrtnu geometriju.

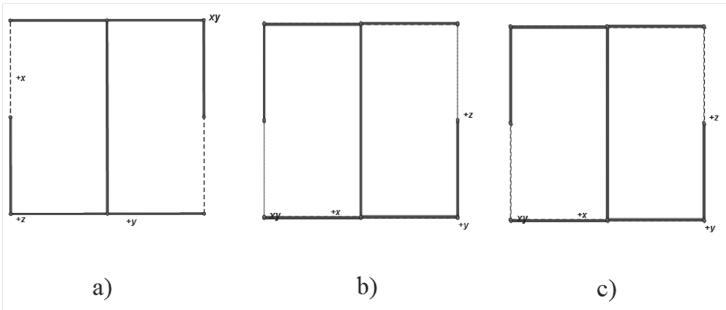
Na kraju, evo dvaju zadataka kojima ilustriramo svu težinu stvaranja 3D vizualizacije objekta ako se poznaju njegove projekcije. Obrnuto je puno lakše!

Zadatak 8. *Nacrtajte prostornu krivulju kojoj su redom zadani tlocrt, nacrt i bokocrt na slici 19.*



Slika 19.

Zadatak 9. *Nacrtajte prostornu krivulju kojoj su redom zadani tlocrt, nacrt i bokocrt na slici 20.*



Slika 20.

Rješavanje ovih problema/zadataka te istraživanja i otkrića ostavljamo čitatelju za vježbu.

Zaključak. Uporaba programskih paketa dinamične geometrije, a u ovom je slučaju *Sketchpad* odabran kao jedan prirodan izbor, omogućuje nam „spajanje" analitičke geometrije (2D i 3D), trigonometrije, eksponencijalne funkcije, uporabu pravokutnog Kartezijevog i polarnog koordinatnog sustava, poopćavanje/specijalizaciju parametarski zadanih krivulja itd.

Svi detalji zasebno uče se u srednjoj školi, ali nikada se ne učini sinteza zbog, meni se čini, inertnosti poučavanja i/ili nedostatka odgovarajućeg edukacijskog alata, ali i zbog sindroma življenja u Platonovoj špilji.

Pogled na grafove funkcija jedne varijable u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu, koje se poučavaju/uče u školskoj matematici, iz ovog kuta razmatrano upućuje na to da su to tlocrti (2D slike na zidu) nekih prostornih (3D) objekata.

Moramo li u školskoj matematici ostati samo na *jednoj sjeni na zidu*? Ili u promjenama kurikula, koje su na vidiku, voditi računa i o tome da, uz odgovarajući alat i model, ... *matematiku treba poučavati tako da se smanji (sukladno uzrastu!) razina apstrakcije i ništa drugo*, tj. da se u snižavanju razine apstrakcije (u izgradnji modela) ne izgube neke *sjene na zidu*.

Učenici bi trebali biti poučavani tako da znaju kad jedna *sjena na zidu* vjerno „prezentira" pojam, a kad pojam daje više *sjenâ*. I kako iz tih *sjenâ* „izgraditi" pojam.

Literatura

1. Cajori, F. (1999.): A History of Mathematics, AMS Chelsea, Providence.
2. Lawrence, J. D. (1972.): A Catalog of Special Plane Curves, Dover, New York.
3. Gusić, J.; Milin Šipuš, Ž.; Mladinić, P.: Eulerova spirala, Poučak br. 40., prosinac 2009., str. 36. - 44.
4. Papy, F. (1972.): Les enfants et la mathématique, Didier, Paris.
5. Polya, G. (2003.): Matematičko otkriće, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb.
6. Steketee, S.; Jackiw, N.; Chanan, S. (2006.): Priručnik s uputama za *Sketchpad*, Proven, Zagreb.
7. Weisstein, E. W. (2009.): Encyclopedia of Mathematics, CRC Press, New York.
8. Wells, D. (1991.): The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry, Penguin, London.
9. * * * (1985.); Enciklopedičeskii slovar junogo matematika, Pedagogika, Moskva.
10. * * * (1977.); Matematičeskija enciklopedija, Sovetskaja enciklopedija, Moskva.
11. * * * (1988.); Matematičeskii enciklopedičeskii slovar, Sovetskaja enciklopedija, Moskva.
12. * * * (2000.); Standardi za nastavu matematike, Hrvatsko matematičko društvo & V. gimnazija, Zagreb.