GOVORITE LI BAYESOVSKI?[1] Pregled bayesovske teorije vjerojatnosti i njezine prototeorije II. DIO

KAJETAN ŠEPER[2]

D. OPIS B-PROTOTEORIJE VJEROJATNOSTI Od protoaksioma do funkcionalnih jednadžbi

11. Sažeti opis Coxove i Jaynesove prototeorije

Nova/stara B-teorija prvih bayesovaca iz 1. pol. 19. st. (Keynes 1921., Ramsey 1926., de Finetti 1931., Jeffrieys 1939., Cox 1946.) dobila je novi polet *zasnivanjem* bayesovskih aksioma na temelju *protoaksioma* ili *postulata*.

Cox ih jednostavno naziva *načela vjerojatnosnog zaključivanja*, a Jaynes *desiderata*, „želje", *zahtjevi da se ispune nedostatci*.

O njihovom „zasnivanju" bit će još govora u sljedećoj glavi E, u poglavlju 14.

11.1. Coxovi protoaksiomi i njihova primjena

Treba se sjetiti da se *mjera razborite uvjerljivosti* (*credibility*) izjave A, ako se zna (ili pretpostavlja) da je izjava – hipoteza B istinita, označava $A \mid B$, a to se neposredno poslije naziva također *vjerodostojnost* (*likelihood*) izjave A pod izjavom – hipotezom B, i to kada se pretpostavlja bilo za koju izabranu mjeru da je vjerodostojnost umnoška AB pod izjavom – hipotezom C određena nekom funkcijom F dva argumenta $B \mid AC$ i $A \mid C$,

$$AB \mid C = F(B \mid AC, A \mid C)\,. \qquad (13)$$

To je Coxov prvi postulat.

Da bi se odredila funkcija F izvodi se, pomoću booleovske algebre logike neformalnim zaključivanjem, funkcionalna jednadžba

[1] Nastavak članka iz broja 66

[2] Kajetan Šeper, Zagreb, Slavonski Brod

(14) $$F[F(x,y),z]=F[x,F(y,z)],$$

recimo, *asocijativni zakon funkcije F*. Tada se ta jednadžba rješava vrlo složeno, analitički, pod određenim pretpostavkama o funkciji *F*. Na kraju se opće rješenje određenim dogovorom normira. Tako se tek sada normirano rješenje naziva *vjerojatnost* (*probability*) koja odgovara *pravilu umnoška*,

(15) $$AB \mid C=(B \mid AC)(A \mid C).$$

Danas se pravilo umnoška označava prefiksom *p* ili *w*:

(16) $$w(AB \mid C)=w(B \mid AC)w(A \mid C).$$

Na sličan, isto tako vrlo složen način iz drugog Coxovog protoaksioma

(17) $$\overline{A} \mid B=S(A \mid B),$$

s funkcijom S jednog argumenta $A \mid B$, Cox izvodi *pravilo nijeka* ili *pravilo jedinice*:

(18) $$A \mid B+\overline{A} \mid B=1.$$

U današnjim se oznakama pravilo nijeka označava također prefiksom p ili w:

(19) $$w(A \mid B)+w(\overline{A} \mid B)=1.$$

11.2. Jaynesovi protoaksiomi i njihova primjena

Osnovni *strukturni protoaksiomi* dijele se na *unutarnje*: **I**, **II** i **IIIa** i *vanjske*: **IIIb** i **IIIc**.

I. Stupnjevi vjerodostojnosti (*plausibility*) predočavaju se realnim brojevima.

II. Pri tome mora postojati osobito dobra sveza (*qualitative correspondence*) sa zdravim razumom.

IIIa. Ako neki zaključak (*conclusion*) može biti opravdan (*reasoned*) na više načina, tada svaki mogući način mora proizvesti isti ishod (*result*).

IIIb. Zaključci se moraju temeljiti na svim raspoloživim, a ne samo na samovoljno izabranim obavijestima (*informations*) važnima za postavljeno pitanje.

IIIc. Podjednakim stanjima znanja uvijek se dodjeljuju podjednake vjerodostojnosti.

Vanjski protoaksiomi **IIIb** i **IIIc** samo su djelomično prevedeni – posebice, u njihovom podnaslovu izvorno stoji *conditions*.

11.3. Loredova dopuna Jaynesovim protoaksiomima

Slijede Loredove dopune po redu od I do III.

LI. Oznaka vjerodostojnosti izjave *A* za danu istinitu [pretpostavljeno istinitu] izjavu C [kratko rečeno pretpostavku ili premisu C], po dogovoru je $A \mid C$; i većoj vjerodostojnosti odgovara veći realan broj.

LII. Umjesto riječi *correspondence* uporabljuje riječ *consistency*, a ta bi se ovdje mogla prevesti riječju „suglasnost", „usuglašenost", „skladnost" ili „usklađenost". Dalje se kaže da ima nekoliko posebnih načina primjene protoaksioma II – primjerice, ako se vjerodostojnost izjave *A* poveća pri promjeni pozadinske izjave – obavijesti *C* sa *C* na *C'*, a pri tome da se vjerodostojnost izjave *B* ne promijeni. Tada se očekuje da nova izjava – obavijest povećava vjerodostojnost istinitosti izjave *AB*:

(20) iz $A \mid C' > A \mid C \;\&\; B \mid C'$ slijedi $AB \mid C' > AB \mid C$.

LIII. Sva tri protoaksioma **IIIa**, **IIIb** i **IIIc** označava samo oznakom **III** i naslovljava nazivom *Consistency*, u našem prijevodu „Neproturječnost"; **IIIa** naziva „Unutarnja neproturječnost"; **IIIb** *Propriety*, što se valjda može prevesti riječju „Prikladnost"; a **IIIc** naziva *Jaynesova neproturječnost* (Jaynes 1968.).

Na kraju ovih dodataka kaže: „Za čudo, tih nekoliko postulata [naših protoaksioma] dovoljno je da potpuno odrede oblik B-teorije".

11.4. Zaključak o prototeoriji i B-teoriji

Nova se teorija vjerojatnosti sastoji iz prototeorije i B-teorije, od kojih svaka ima svoje aksiome i poučke izražene *w*-formulama. Primjena protoaksioma, nazvanih postulati, dovodi do dvije funkcionalne jednadžbe rješenja kojih su, uz određene dogovore o vrsti tih nepoznatih funkcija i normiranju, upravo B-aksiomi. Primjena tih B-aksioma tzv. osnovnih B-pravila dovodi do učinkovitih i djelotvornih poučaka tzv. izvedenih B-pravila.

Spomenute *w*-formule pridružuju se složenim B-izjavama $A \mid B$, izjavi *A* za zadanu izjavu *B*, što se tumači *B*-silogizmom s premisom *B* i konkluzijom *A*, a mogu se nazvati *uvjetne* ili *pogodbene formule* ili, kratko, *pogodbe*. Pri tome već sama ta pogodba u mnogih se (starijih) autora smatra *stupnjem prihvatljivosti* protumačenog silogizma i predočava realnim brojem *w*, $0 \leq w \leq 1$, a danas se ipak još stavlja prefix: $w\,(A \mid B)$.

(Prije normiranja, stupanj prihvatljivosti zove se također *stupanj uvjerljivosti* (*degree of belief*) ili *stupanj vjerodostojnosti* (*degree of likelihood*). Odatle i prefiksi „bel" i „lik".)

Izjave *A* i *B* su izjave klasične logike u standardnom obliku, gdje se ističu samo dvije skupine izjava: istinite (izvjesne, tautologije) i lažne (proturječne, kontradikcije), kojima se pripisuju tzv. *istinosne vrijednosti* 1 odnosno 0 u svim redcima tablice istinosti.

Doduše, budući da je izjava *A* lažna onda i samo onda ako je $\overline{A}$ istinita, postoji zapravo samo jedna skupina istinitih izjava.

B-teorija proširuje klasičnu logiku izjava tako da se ističu i nove izjave koje nisu ni istinite ni lažne i kojima se pridružuju „realne istinosne vrijednosti" ili *vjerojatnosti* *w*, $0 < w < 1$, a istinosne vrijednosti 1 i 0 postaju krajnje vjerojatnosti. Na isti se način proširuje i istinitost i lažnost klasičnih silogizama. Pri tome je

$$w(A \mid) = w(A \mid \mathbf{1}) = w(A) \text{ i } w(A \mid A) = 1, \text{ uz } w(A) > 0 \text{ u 2. slučaju.}$$

Sustav protoaksioma, može se s pravom reći, nije ni logički u današnjem smislu, i to ni po sadržaju ni po obliku uobičajenog i ustaljenog standarda, a također nije ni matematički u sadašnjem razvojnom stupnju uobičajene i ustaljene jasnoće i točnosti, nego je, rekao bih, prvenstveno prirodoslovno-znanstveni sustav koji je, iako matematički nedovoljno jasan i točan, pa čak i nejednoznačno primjenljiv i, unatoč tome i možda baš zbog toga, pogodan u primjeni na putu do dvije funkcionalne jednadžbe čija bi rješenja, uz neke posebno dogovorene uvjete, bila od prije znana dva zakona vjerojatnosti. Ti su zakoni aksiomi B-teorije koji se primjenjuju bez prototeorije i, kako mnoštvo primjera pokazuje, nadmašuje stari sustav vjerojatnosti događaja-skupova, tj. K-teoriju moguće s manjim ili većim izmjenama.

Sa stajališta zasnivanja cjelokupne matematike (uključujući i logiku), ili posebnih matematičkih grana, a također sa stajališta filozofije matematike i znanosti, smatram da takva prototeorija zahtijeva kritičko preispitivanje i temeljitu preradbu u budućem razvojnom nastavku prolaskom kroz matematičko-filozofsko čistilište. To je naročito važno jer neki bayesovci smatraju da samo B-teorija nije dovoljna pri rješavanju zadataka.

Naime, aksiomi B-teorije su prototeoremi, ali njihove dokaze mogu prihvatiti samo oni koji ih bespogovorno žele prihvatiti, koji žele dobiti temelj vjerojatnosti u obliku B-teorije, jer ponuđena objašnjenja tijekom primjene tih protoaksioma nisu općenito prihvatljiva bez znatne sumnje. Posebice, u tim se dokazima uporabljuju čak i dvije funkcionalne jednadžbe klasične realne analize! – a njihovo rješenje zahtijeva sasvim točne pretpostavke.

Da bi takve dokaze matematičar mogao prihvatiti kao ispravne ili ih barem neznatno popraviti, morao bi biti fizičar, astronom, prirodoslovac, inženjer, statističar, ekonomist, sociolog, psiholog, ili neki znanstveni mješanac i genijalac prošlih vremena neopterećen suvremenom metodologijom, ili pak povjesničar matematike koji bi se vremenskim strojem prebacio u prošlost i nazad u sadašnjost da spoznaje iz prošlosti predoči spoznajnim jezikom sadašnjosti, a zasigurno ne logičar nijedne do sada poznate vrste.

Ideja da aksiomi neke teorije moraju biti poučci (teoremi) neke druge temeljne teorije nije nova, ali ta druga temeljna teorija mora biti zasnovana na većoj jasnoći i točnosti od teorije koju utemeljuje, a ta svojstva nema prototeorija B-teorije. Dapače, novija istraživanja pokazuju da je ta prototeorija nepopravljiva bez znatnih izmjena i dopuna. (Vidi [Halpern 1999].)

Zapravo, B-teorija je na razini suvremenih matematičkih težnji jasnoće i točnosti, pa ako bi u primjeni bila dovoljna, a čini se da jest, bila bi samo jedna od teorija vjerojatnosti, i to istaknuta i bolja od drugih, kako se svako može uvjeriti, zbog veće, lakše i točnije primjenjivosti. Bitan temeljan dio prototeorije su protoaksiomi, kojih nema u B-teoriji, pa se postavlja problem o tome jesu li, a čini se da nisu, i, ako jesu, u kojoj su mjeri oni bitni sudionici u rješavanju praktičnih zadataka.

Primjena se ne potvrđuje teorijom, nego obrnuto!

Fazi-teorija (fazi-logika, fazi-matematika, fazi-teorija skupova, „fazi" od engleskog pridjeva *fuzzy*) mnogo je godina imala također slične prirodoslovno-inženjerske temelje pretendirajući na sveopću teoriju *neizvjesnosti*. Nakon mnoštva prilično loših članaka i udžbenika o fazi-teoriji i njezinim primjenama i, usporedno s tim, nekih logičkih čišćenja, došlo je do pravog modela fazi-logike, ali ne u primjenama, primjerice ne u nadzoru i osiguranju kakvoće gdje su ipak još uvijek u uporabi stari modeli.

Najzad, od samog početka razmišljanja o slučajnosti i vjerojatnosti kao njezinoj mjeri stalno se razglabalo o tome jesu li slučajne pojave *objektivno* ili *predmetno slučajne*, neovisno o našem znanju i neznanju i uvjerenju o njima, a njihove vjerojatnosti kao neke fizikalne konstante, kao svojstva stvarnog svijeta i prirode, ili *subjektivno* ili *osobno slučajne*, s mogućim različitim uvjerenjima o istom istraživanom zadatku ovisno o znanju rješavatelja. Taj spor živi i danas.

Sljedbenici bayesizma (ili bayesianizma, a također i bayesinizma) dijele se na subjektivne i objektivne bayesovce, a neki su bayesovci i subjektivni i objektivni, ovisno o razini promišljanja.

E. POVIJESNI OSVRT
Postanak i razvoj razmišljanja o slučajnosti i vjerojatnosti od 17. do 21. st.

12. Postanak

O slučajnosti i vjerojatnosti promišljalo se odavno. Starogrčko filozofsko raspravljanje o toj temi prenijeli su u Europu Arapi, ali sve je to bilo bez ikakvog matematičkog sustava.

Početci matematiziranja tog područja počinju *mjerenjem stupnja slučajnosti nekih ponovljivih pojava u hazardnim igrama,* gdje je kockarima ili kartašima bilo važno kladiti se za određenu svotu novca s očekivanim dobitkom, a ne gubitkom. Poznat je problem kockara Chevaliera de Meréa o kojem su u prepisci izmjenjivali svoje teorijske stavove znameniti matematičari B. Pascal i P. de Fermat.

Vjerojatnost se tu tumačila teorijski, brojem mogućih ishoda, pri čemu je vjerojatnije, dakle i bolje, kladiti se na onu kombinaciju kocaka za igru koja ima veći broj mogućih ishoda. Sam kockar primijetio je da se neka kombinacija javlja više puta od neke druge, što znači da je on čisto iskustveno mjerio učestalost nastupa pri ponavljanju igre s kockama ili kartama. Mi samo ovdje ističemo dva stajališta o biti vjerojatnosti, *teorijsko (objektovno)* i *iskustveno (subjektivno, osobno),* koja su stalno vladala do konca prve polovice 20. st. i još se o njima ozbiljno raspravlja sve do danas.

Ističemo još da su statističke metode bile prevažne u državnoj administraciji visoko razvijenih civilizacija i da su također utjecale na cjelovitu probabilistiku tj. *stohastiku*.

13. Razvitak

13.1. Bernoulli i Laplace

U tom dvjestotinjak godina dugom razvoju ističemo samo J. Bernoullija i njegovu *Ars Conjectandi (Vještinu predviđanja)* iz 1713. i P.S. Marquisa de Lapalacea i njegovu *Théorie analitique des Probabilités* iz 1812. Rasprava T. Bayesa iz 1763. ostala je, nažalost, prilično dugo nezapamćena, sve do prve polovice 20. st. kada se zaista veliki značaj njegove i, neovisno o njemu, Laplaceove metode rješavanja problema vezano za tzv. Bayesov poučak i općenitiji Bayes-Laplaceov poučak, počeo postupno spoznavati.

13.2. Sljedbenici Kolmogorova nasuprot bayesovaca

Sve do prve polovice 20. st., od 20-ih do 50-ih godina, pojavljuju se, najprije sporadično a kasnije sve više i više, radovi koji zasnivaju vjerojatnosti tumačeći je *stupnjem razborite prihvatljivosti pod određenim podatcima o razmatranom slučaju.* Usporedno s tim pravcem zvanim *bayesianizam* pojavljuju se i različite *aksiomatizacije vjerojatnosti,* s različitih temelja, među kojima se posebice ističe članak A. Kolmogorova iz 1933. koji je gotovo u cijelosti prihvaćen od matematičara, njegovih sljedbenika, do danas. No od 50-ih do 90-ih godina počinje znatniji razvitak *bayesovske teorije vjerojatnosti* potaknut Bayesovim i Laplaceovim radovima, te novim i boljim metodama u primjeni. Tim se metodama pretežno koriste primjenjivači raznih struka.

13.3.

U drugoj polovici 20. st., od 50-ih godina do konca stoljeća, naglo raste prodor B-teorije u statistiku, analizu podataka, teoriju informacije, ekspertne sustave, umjetnu inteligenciju, približno i uzročno zaključivanje, iako usporedno živi i teorijsko-skupovna i teorijsko-mjerna K-teorija, najrasprostranjenija među matematičarima sve do danas.

13.4.

U prvoj polovici 21. st., od 2000. do danas, sređuju se i pišu sustavni udžbenici, monografije i rasprave o bayesianizmu, o raznim primjenama do filozofskih promišljanja. Usporedbe radi, možemo reći da je *vjerojatnosni prostor K-teorije* zamijenjen *probabilističkom logikom B-teorije.*

13.5.

Prilažem samo popis bayesovaca u prvoj polovici 20. st.:

1921. Keynes
1926. Ramsey
1931. Jeffries
1931. De Finetti
1937. De Finetti
1939. Jeffries (2. izd. 1948.; 3. izd.1961.)
1946. Cox

i samo nekih većih i značajnijih djela u prvoj polovici 21. st.:

2001. Corfield & Williamson
2003. Jaynes (†1998.)
2006. Howson & Urbach
2009. Irvin

13.6.

Za dublji i širi uvid u povijest vjerojatnosti upućujemo čitateljstvo na opširne povijesne monografije:

Todhunter [Todhunter 1949] (1. izd. 1865.)
David [David 1961]

i mnoge povijesne podatke u suvremenim udžbenicima i znanstvenim i filozofskim člancima o bayesianizmu.

13.7.

U nas ima samo nekoliko članaka o bayesianizmu:

2012. Hatzivelkos
2013. Hatzivelkos
2013. Šeper
2013a. Šeper
2012. Z. Šikić
2013. Z. Šikić
2014. D. Lauc & Z. Šikić

14. O literaturi

U ovom smo se pregledu ograničili samo na osnovni teorijski uvid u B-teoriju i usporedbu s K-teorijom. Prevažnu i mnogovrsnu primjenu B-teorije potpuno smo izostavili i zato upućujemo zainteresirano čitateljstvo da se posluži barem jednim udžbenikom, a dobro bi bilo i izabranim znanstvenim i filozofskim člancima o tome području. Posljednjih 25 godina ponuda bayesovski usmjerenih znanstvenih, stručnih i preglednih radova izuzetno se povećala.

Primjerice, navedimo samo dva udžbenika: stariji, posmrtno izdan [Jaynes 2003] i noviji [Howson & Urbach 2006].

U nas nema ni jednog udžbenika B-teorije, a ni fakultetskog kolegija koji bi mlađe studente i istraživače uputio u tu teoriju. Profesionalni matematičari ne mare za bayesovsku teoriju jer se bave samo skupovno-mjernom teorijom Kolmogorova, a primjenjivači se snalaze kako znaju i umiju.

Izuzetak su dva znanstvena članka Zvonimira Šikića [Šikić 2012] i [Šikić 2013] *o bayesovskoj metodi u primjeni* (znanoj još Laplaceu 1812.) i o rješavanju *prototeorij-*

skih funkcionalnih jednadžaba Abelove vrste, kojim on zasad jedini promiče tu u naprednom svijetu već neizostavnu teoriju i njezine mnogovrsne primjene. Nedavno je objavljen udžbenik logike u 3. razredu gimnazije [Lauc & Šikić 2014, 195-2014, 211-212] i primjeni logike u bayesovskoj teoriji vjerojatnosti. Pod Šikićevim su utjecajem objavjena dva članka mlađeg suradnika Aleksandra Hatzivelkosa [Hatzivelkos 2012] i [Hatzivelkos 2013] o znanstvenom i filozofskom pojmu *uzročnosti* (i *posljedičnosti*) i *bayesovskim mrežama* kao matematičkom modelu, a također je izrađen ovaj članak i članak [Šeper 2013].

Autor u [Šikić 2013] u samom početku pretpostavlja da je u izvornoj Ramseyjevoj prototeorijskoj analizi uvjetna vjerojatnosna funkcija sa $\mathbb{L}\times\mathbb{L}$ u $[0,1]$ što nije u skladu sa suvremenim shvaćanjem po kojemu se pretpostavlja u w-izrazu $w(A\,|\,B)$ J-ograničenje $B \neq \LEFTcircle$ ako se polazi od aksioma (U), ili još jače K-ograničenje $w(B) > 0$ ako se polazi od aksioma ili definicije (w3).

Zato bi autorov dokaz temeljen na prototeorijskom obrazlaganju i rješavanju pripadnih funkcionalnih jednadžaba trebalo podrobno preispitati u smislu mogućnosti prepravljanja, uz pretpostavke suvremene bayesovske teorije. Inače bi taj dokaz, ako se njegovo prepravljanje ne može izvesti pomoću manjih zahvata, bio samo povijesna studija a ne opravdanje suvremene bayesovske teorije.

U suvremenih je bayesovaca uvjetna vjerojatnosna funkcija w sa $\mathbb{L}\times\mathbb{L}'$ u $[0,1]$, gdje je $\mathbb{L}'$ skup izjava tj. izjavnih formula bez proturječnih formula, dakle s J-ograničenjem $B \neq \LEFTcircle$ u $A\,|\,B$, a općenito s još jačim K-ograničenjem $w(B) > 0$ u $w(A\,|\,B)$.

Alternativno, umjesto djelomične vjerojatnosne funkcije $w(A\,|\,B)$ dva klasična izjavna argumenta A i B (točnije, vjerojatnosno djelomične samo u drugom argumentu), može se uvesti u razmatranje potpuna vjerojatnosna funkcija $w'(A \Leftarrow B)$ jednog neklasičnog izjavnog argumenta, *bez ikakvog izjavnog ili vjerojatnosnog uvjeta,* tumačeći crtu silogističkom implikacijom. (Vidi I. dio.)

F. DODATCI

15. Sintaktička definicija (formalno) dokazivih formula, tj. (formalnih) poučaka

1. Svaki aksiom, sadržan na poznati način u shemama aksioma, dokaziva je formula.
2. Ako su A i $A \to B$ dokazive formule, tada je, prema pravilu *mp*, B dokaziva formula.

Formula je dokaziva ako (i samo ako) je dokaziva u konačno mnogo koraka po 1. i 2.

Primjedba. Navedena definicija je tzv. *induktivna definicija*. Zato se završni 3.dio izostavlja jer je to bitan dio pojma induktivne definicije. Unatoč tome, mnogi ga ipak stalno navode.

Primjedba. Praktički je pogodno umjesto dokazivosti definirati (*formalan*) *dokaz*, a tada pomoću njega definirati dokazivost.

16. Semantička definicija (istinosne) valjanosti

Ta se definicija temelji na poznati način postupnim računanjem *istinosnih vrijednosti* svake izjavne formule primjenom tzv. *istinosnih tablica* pridruženih izjavnim veznicima (operacijama).

A	B	AB	$A+B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \setminus B$	A / B	$A \dotplus B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

$A \to B := \overline{A} + B$

$A \leftrightarrow B := (A \to B)(B \to A)$

$A \setminus B := A - B := A\overline{B}$ (razlika, diferencija)

$A / B := B - A := \overline{A}B$ (proturazlika, kontradiferencija)

$A \dotplus B := A\overline{B} + \overline{A}B$ (disjunkcija, simetrična diferencija)

17. Gentzenov sustav prirodnog zaključivanja prilagođen ovom pregledu

Navest ćemo Kleeneov sustav klasične logike izjava, , izveden iz Gentzenovog, s dodatkom logičkih konstanti ništice i jedinice. (Vidi [Vuković 2009].)

Sheme aksioma i pravilo *modus ponens* (*mp*)

	uključivanja	isključivanja
	$A \to (B \to A)$	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}\,mp$
$\to$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	
$\cdot$	$A \to (B \to AB)^{1)}$	$AB \to A$ $AB \to B$
$+$	$A \to A + B$ $B \to A + B$	$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A + B \to C))$
$-$	$(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})^{2)}$	$\overline{\overline{A}} \to A^{3)}$
$\LEFTcircle$	$A \to (\overline{A} \to \LEFTcircle)$	$\LEFTcircle \to B$
$\mathbf{1}$	$A \to \mathbf{1}$	$(A \to C) \to ((\overline{A} \to C) \to (\mathbf{1} \to C))$

1) Može li se $(\cdot u)$ zamijeniti s $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to AB))$?

2) Može li se $(-u)$ zamijeniti s $A \to (\overline{A} \to \mathbf{0})$?

3) Shema $A + \overline{A}$ je (formalno) dokaziva. Zamjenom $(-i)$ s $A \to (\overline{A} \to B)$ shema $A + \overline{A}$ više nije dokaziva.

4) Logičke konstante $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ mogu se uvesti u sustav i definicijama $\mathbf{0} := A\overline{A}$ (*principium contradictionis*) i $\mathbf{1} := A + \overline{A}$ (*principium tertium non datur*).

18. Booleovski sustav logike

Navest ćemo sustav booleovske algebre, B**A**, Takeutija i Zaringa prilagođen booleovskoj logici, B**L**, u ovom pregledu.

Sheme jednakosnih aksioma i pravila jednakosti: povratnosti (refleksivnosti), zrcalnosti (simetričnosti), prelaznosti (tranzitivnosti)

1.	$A + B = B + A$	$AB = BA$
2.	$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A(BC) = (AB)C$
3.	$A + BC = (A + B)(A + C)$	$A(B + C) = AB + AC$
4.	$\mathbf{0} + A = A$	$\mathbf{1}A = A$
5.	$A + \overline{A} = \mathbf{1}$	$A\overline{A} = \mathbf{0}$
6.	$\dfrac{}{A = A}$	
7., 8.	$\dfrac{A = B}{B = A}$	$\dfrac{A = B \quad B = C}{A = C}$

Slijede izabrane dokazive jednakosne formule i poučci

9.	$A + A = A$	$AA \quad A$
10.	$A + AB = A$	$A(A + B) = A$
11.	$\mathbf{1} + A = \mathbf{1}$	$\mathbf{0}A = \mathbf{0}$
12.	$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
13.	$\overline{\overline{A}} = A$	
14.	$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$	$\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$
15.	$A + B = \mathbf{1}$ & $AB = \mathbf{0} \Rightarrow B = \overline{A}$	

Slijede izabrane definicije i poučci

16. $A \to B := \overline{A} + B$

17. $A \leftrightarrow B := (A \to B)(B \to A)$

18. $A - B := A\overline{B}$

19. $A \le B :\Leftrightarrow AB = A$

20. $A \le B \Leftrightarrow A \to B = \text{▮}$

21. $A \le B \Leftrightarrow A - B = \text{◐}$

22. $A \le B \Leftrightarrow \overline{B} \le \overline{A}$

23. $A \le \overline{B} \Leftrightarrow AB = \text{◐}$

24. $A \le A$

25. $A \le B \ \& \ B \le A \Rightarrow A = B$

26. $A \le B \ \& \ B \le C \Rightarrow A \le C$

27. $\text{◐} \le A \le \text{▮}$

28. $A \le B \ \& \ C \le D \Rightarrow A + C \le B + D \ \ \& \ AC \le BD$

29. $A \le A + B \qquad B \le A + B$

30. $A \le C \ \& \ B \le C \Rightarrow A + B \le C$

31. $AB \le A \qquad AB \le B$

32. $C \le A \ \ \& \ C \le B \Rightarrow C \le AB$

G. NEZAVISNOST U B-TEORIJI I USPOREDBA S K-TEORIJOM Od slabe do jake sadržajne i formalne nezavisnosti dviju i *n* ≥ 2 izjava

19. Četiri dvostruka pitanja

19.1. Ima li u B-teoriji ***uvjetnih vjerojatnosti***? I zašto ih nema?

Odgovor je na oba pitanja kratak i jasan. Nema ih, jer su zapravo *sve vjerojatnosti uvjetne*. (Ipak se B-teorija razvija kao i K-teorija na temelju bezuvjetne vjerojatnosne funkcije $w(A)$ jednog argumenta, a tek nakon toga i uvjetne vjerojatnosne funkcije $w(A \mid B)$ dvaju argumenata.)

19.2. Ima li u B-teoriji ***nezavisnih događaja***? I zašto ih nema?

Odgovor je na oba pitanja također kratak i jasan. Nema ih, jer *događaja uopće nema*, a umjesto njih postoje *izjave*, *sudovi* i složenije *silogističke tvorevine*.

19.3. Ima li u B-toeriji ***nezavisnih izjava***? I zašto ih nema?

Odgovor na prvo pitanje ponovo je kratak, ali samo djelomično jasan. Naime, nije da ih nema, nego ih samo općenito gotovo nema, a ako ih ima, onda su to *slabe sadržajne tvorevine* doslovce prenesene iz K- u B-teoriju, a u „praktičarskoj" K-teoriji to su gotovo uvijek *formalne tvorevine* bez intuitivnog dosljednog objašnjenja i razumskog određenja, a ako ih ima, objašnjenja su neprirodna i nepotpuna.

Odgovor pak na drugo pitanje je pomanjkanje temeljitije teorijske izgradnje šireg razmjera i istraživanja odraza takvog šireg pojmovnika na poznate velike poučke i teorije u kojima je upleten pojam nezavisnosti i istraživanja odraza u primijenjenim dijelovima svekolike stohastike. (Vidi podpoglavlje 22.10.)

19.4. Može li se u B-teoriji ipak naći smisla za istraživanja i moguće primjenjivanje pojma nezavisnih izjava u širem spektru vrsta i podvrsta tog pojma da bi se na rezultatima moglo zaključiti o tome je li taj pojmovni spektar nezavisnosti važan ili nije? I zašto takvog teorijskog istraživanja nema?

Odgovor na prvo pitanje i sada je kratak i jasan, ali je objašnjenje podulje i za K- i za B-teoriju. Odgovor je: „Može i treba!", i to u obje teorije. Naime, u K-teoriji formalna je nezavisnost već razvijena u mnogim samostojnim granama stohastike sa širokim spektrom primjena i te se grane manje ili više prenose u B-teoriju, pa se može očekivati da bi uporaba nove sadržajne teorije nezavisnosti u obje teorije bila važna i perspektivna.

Na drugo pitanje odgovora nema sve dok se ne izgradi prihvatljiva sadržajna teorija iz koje bi proizašli prihvatljivi sadržajni rezultati. Iz formalne teorije proizlaze samo, i to jednostavnije i lakše, formalni rezultati. Pitanje koja je teorija, K- ili B-, a isto tako koja je teorija nezavisnosti, formalna ili sadržajna, bolja ili vrednija, odlučit će budućnost – jer stvaran život nalazi uvijek pravi put. (Vidi podpoglavlje 22.10.)

19.5. Opći dogovori

Govoreći o izjavama i sudovima u poglavlju ove glave **pretpostavljamo da su izjave međusobno *nepodjednake*, a sudovi međusobno *različiti*, dakle da se radi o pripadnim skupovima, iako ih često predočavamo nizovima.** Radit će se zapravo uglavnom samo o *konačnim skupovima izjava ili sudova*, tj. o logici izjava odnosno sudova, $\mathbf{L}_\nu$.

U čitavom poglavlju 20 i podpoglavlju 21.1 A označava sud P_1, a B sud P_2 . U nastavku pak, počevši od podpoglavlja 21.2 nadalje, A_i, B_j, A i B označavaju složenije sudove vezano za rastavnice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ skupa $\mathcal{P}$ i za pojam „logičke zavisnosti od" sudova u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Također ćemo od podpoglavlja 21.2 dalje pretpostaviti da su slučajevi 1, 2) sud A je logička ništica ili logička jedinica i 3) sud B je logička jedinica vezano za uvjetnu vjerojatnost $w(A|B)$ i vjerojatnosnu nezavisnost $w(A|B) = w(A)$ A od B posebno već istraženi i uklonjeni iz razmatranja. Naime, lako se uviđa da je u slučajevima 1, 2) sud A nezavisan bilo od kojeg suda $B \neq ◐$, a u slučaju 3) da je svaki sud A nezavisan od suda $B = \mathbf{1}$. Inače je preporučljivo složenu shematsku premisu raščlaniti i obznaniti je u pogodnom podjednakom obliku.

20. Slaba i jaka sadržajna i formalna nezavisnost dviju izjava

Osnovna podjela vjerojatnosne nezavisnosti dviju izjava ili dvaju sudova A i B je na *sadržajne* (*kontentualne, kontenzivne*) i *formalne*.

U nastavku će biti određene dvije vrste sadržajne nezavisnosti: slabija *slaba* (*djelomična*, *jednostavna*) i jača *jaka* (*potpuna*, *složena*) i za svaku vrstu dvije podvrste: slabija, pomoćna *usmjerena* i jača, glavna *međusobna*, i to s početka samo dvaju različitih sudova A i B, a zatim od podpoglavlja 21.2 nadalje $n \geq 2$ različitih sudova $P_1, P_2, ..., P_n$. Na kraju ovog poglavlja bit će navedene dvije, doduše podjednake, vrste formalne nezavisnosti ponovo dvaju različitih sudova.

20.1. Definicija.

Slaba usmjerena sadržajna nezavisnost suda A od suda B, $A\, Ind\, B$*, određuje se pravilom (1) i ograničenjem (2).*

(1) $A\, Ind\, B :\Leftrightarrow w(A \mid B) = w(A)$.

(2) $w(B) > 0$.

U tom se slučaju može reći da je B uklonjiva premisa u w-pogodbi $w(A \mid B)$.

20.2. Definicija.

Slaba međusobna sadržajna nezavisnost sudova A i B, $Ind\left(A,B\right)$*, određuje se pravilom (3) i ograničenjem (4).*

(3) $Ind\left(A,B\right) :\Leftrightarrow A\, Ind\, B \;\&\, B\, Ind\, A$.

(4) $w\left(A\right) > 0 \;\&\; w\left(B\right) > 0$.

20.3. Definicija.

Jaka usmjerena sadržajna nezavisnost suda A od suda B, $A\, IND\, B$*, objašnjava se pravilom (5) i ograničenjem (6).*

(5) $A\, IND\, B :\Leftrightarrow A\, Ind\, B,\; A\, Ind\, \overline{B},\; \overline{A}\, Ind\, B \;\&\, \overline{A}\, Ind\, \overline{B}$.

(6) $w\left(B\right) > 0 \;\&\; w\left(\overline{B}\right) > 0$.

20.4. Definicija.

Jaka međusobna sadržajna nezavisnost sudova A i *B , IND (A, B), objašnjava se pravilom (7), tj. pravilom (7'), pod uvjetom ograničenja (8).*

(7) $IND\left(A,B\right) :\Leftrightarrow A\, IND\, B \;\&\, B\, IND\, A$.

(7') $IND\left(A,B\right) :\Leftrightarrow w\left(A|B\right) = w\left(A\right),\; w\left(A|\overline{B}\right) = w\left(A\right),\; w\left(\overline{A}|B\right) = w\left(\overline{A}\right),$
$w\left(\overline{A}|\overline{B}\right) = w\left(\overline{A}\right),\; w\left(B|A\right) = w\left(B\right),\; w\left(B|\overline{A}\right) = w\left(B\right),$
$w\left(\overline{B}|A\right) = w\left(\overline{B}\right) \;\&\; w\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = w\left(\overline{B}\right)$.

(8) $w\left(A\right) > 0,\; w\left(\overline{A}\right) > 0,\; w\left(B\right) > 0 \;\&\; w\left(\overline{B}\right) > 0$.

20.5. Definicija.

Osnovna formalna nezavisnost sudova A i *B određuje se tzv. pravilom množenja (9).*

(9) $$w(AB)=w(A)w(B).$$

Obično se i ovdje polazi od uvjetne vjerojatnosti, ali bez navedenih uvjeta *normalnog ograničenja* proširujući $w(A|B)$ i slučajem $w(B)=0$. Neki u tom slučaju stavljaju, primjerice $w(A|B)=0$ i proširuju standardnu realnu aritmetiku.

20.6. Definicija.

Opća formalna nezavisnost sudova A i B određuje se tzv. sustavom pravila množenja (10).

(10) $$\begin{cases} w(AB)=w(A)w(B), \\ w(A\overline{B})=w(A)w(\overline{B}), \\ w(\overline{A}B)=w(\overline{A})w(B), \\ w(\overline{A}\overline{B})=w(\overline{A})w(\overline{B}). \end{cases}$$

20.7. Korolari 1-5.

Korolar 1. Već iz Definicije 20.1 slijedi Definicija 20.5, ali obrat vrijedi samo uz dodatni zahtjev (2).

Korolar 2. Iz Definicije 20.2 slijedi također Definicija 20.5, ali obrat vrijedi samo uz dodatni zahtjev (4).

Korolar 3. Iz Definicije 20.3 slijedi također Definicija 20.5, ali obrat vrijedi samo uz dodatni zahtjev (6).

Korolar 4. Iz Definicije 20.4 slijedi također Definicija 20.5, ali obrat vrijedi samo uz dodatni zahtjev (8).

Korolar 5. Sustav (10) Definicije 20.6 je *zavisan*, i to u tolikoj mjeri da već iz prvog pravila $(10)_1$ ili bilo kojeg i -tog $(10)_i$ slijede sva ostala pravila $(10)_j$, $j \neq i$.

Korolar 6. (Podjednake definicije s Definicijom 20.4.)

a. Vrlo opsežno opće pravilo (7) tj. (7’) može se zamijeniti jednim jedinim pravilom (7”), uz dakako ostanak opsežnog ograničenja (8).

b. Nadalje se umjesto (7”) može uporabiti pravilo (9) iz Definicije 20.5 i tada umjesto (8) uporabiti primjerice manje opsežno ograničenje (8’).

(7”) $$IND(A,B) :\Leftrightarrow w(A|B)=w(A).$$

(8’) $$w(AB)>0 \;\&\; w(\overline{A}\overline{B})>0.$$

21. Jaka sadržajna i formalna nezavisnost $n \geq 2$ sudova

U ovom ćemo poglavlju poopćiti samo jaku međusobnu sadržajnu i formalnu nezavisnost dvaju sudova na opći slučaj $n \geq 2$ sudova.

21.1. Problem poopćavanja

U svrhu poopćavanja raščlanimo najprije Definiciju 20.4 pozivajući se na sve tri prethodne Definicije. Time ćemo dobiti početni uvid u način poopćavanja.

Uočimo da se pri raščlambi pojavljuju sljedeći nizovi sudova. Prvo, pojavljuje se samo jedna bitna podjela dvočlanog niza A, B na podniz A / B jedinstvenog tipa 1/1 (i druga B / A nebitna). Drugo, pojavljuju se dva pridružena dvočlana niza $A, \overline{A}$ i $B, \overline{B}$. Treće, zatim se pojavljuju četiri dvočlana niza $A, B; A, \overline{B}; \overline{A}, B; \overline{A}, \overline{B}$; i obrnuto, još četiri $B, A; \overline{B}, A; B, \overline{A}; \overline{B}, \overline{A}$. Četvrto, pojavljuje se još i četveročlani niz ograničenja. Peto, uzimajući u obzir Definiciju 20.6, pojavljuje se na kraju i četveročlani niz umnožaka AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\overline{B}$.

Prirodno se postavlja problem kako „na sličan način" treba postupiti pri određivanju jake međusobne sadržajne nezavisnosti triju, četiriju, pet, itd. sudova i općenito $n \geq 2$ sudova, a isto tako pri određivanju njihove formalne nezavisnosti.

Postupiti „na sličan način" znači za jaku međusobnu sadržajnu nezavisnost postupiti na intuitivno prihvatljiv način, a to znači uzorom na Definiciju 20.4. Općenito, put kojim se dolazi do poopćene jake međusobne sadržajne nezavisnosti nije jednoznačan, ali ako se ide putem sljedeće *opće ideje jake međusobne sadržajne nezavisnosti*, taj put je jednoznačan.

U K-teoriji se pravila množenja kojima se određuje formalna nezavisnost *slučajnih događaja* temelje samo na iskustvenom, a ne na intuitivnom pojmu nezavisnosti.

Ipak sâm formalan pojam nezavisnosti može biti prihvatljiv i u B-teoriji, ali samo ako se pridodaju normalna ograničenja kada postaje sadržajno prihvatljiv.

21.2. Opća ideja jake međusobne sadržajne nezavisnosti

a. Složen slučaj: $\boldsymbol{IND}(\mathcal{P})$

Po općoj ideji skup $\mathcal{P}$ sudova, predstavnika $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $n \geq 2$, različitih razreda podjednakih izjava iz $\mathbf{L}_v /_{\approx}$, je *jako međusobno sadržajno nezavisan*, **ako je**, za svaki rastav $\mathcal{A} / \mathcal{P} / \mathcal{B}$ skupa $\mathcal{P}$ na podskupove-rastavnice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ *reda r*, s r sudova, $1 \leq r < n$, i $\mathcal{B}$ *reda* $n - r$, s $n - r$ sudova, kaže se *tipa* $r / n - r$, **ne samo** za svaki sud A_i iz $\mathcal{A}$ i za svaki sud B_j iz $\mathcal{B}$, **nego također i** za svaki sud A „logički zavisan od" sudova u $\mathcal{A}$ i za svaki sud B „logički zavisan od" sudova u $\mathcal{B}$, A **jako usmjereno nezavisan od** B **i obrnuto**, u oba slučaja po Definiciji 20.3.

Pri tome treba još točno odrediti značenje pojma „logičke zavisnosti od". (Vidi nastavak, a posebno Definiciju 21.3.3.b i Rastav skupa $\mathcal{P}$ 21.3.4.)

b. Jednostavan slučaj: $\boldsymbol{IND}_0(\mathcal{P})$

Uklonimo li iz 21.2.a uporabu pojma „logičke zavisnosti od", dobivamo jednostavan slučaj, koji je u primjeni mnogo pogodniji i radno preporučljiv. (Vidi ostvarenje složenog slučaja u Definiciji 21.4 i primjedbu u zadatku 22.10.)

21.3. Priprema za opću definiciju

Nastavljajući prethodno izrečenu ideju jake međusobne sadržajne nezavisnosti sudova, tj. nepodjednakih izjava iz $\mathbf{L}_\nu$, sada ćemo definirati pojam „logičke zavisnosti od" i uvesti dodatne pojmove i pridružene nazive i oznake.

21.3.1. Normalni polinomi

Već smo ranije, vezano za pojam podjednakosti u izjavnoj logici, **L**, govorili o konkretnoj booleovskoj logici, B**L**, i apstraktnoj booleovskoj algebri, B**A**, i Lindenbaumovoj algebri razreda međusobno podjednakih izjava ili razrednih predstavnika, L**A**. (Vidi potpoglavlje 3.3 i 6.4.)

U nastavku je važan samo *konačan slučaj* izjavne ili sudovne logike, $\mathbf{L}_\nu$, s konačno mnogo atoma: $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$. Opisat ćemo prvo algebarski, a potom logički pristup definiciji „logičke zavisnosti od".

Ako se, prvo, umjesto razreda izdvoje odabrani predstavnici razreda; ako se, drugo, za razredne predstavnike proglase izjave u $\mathbf{L}_\nu$ u savršenom ΣΠ-normalnom obliku, zvane *normalni sudovi* ili *normalni polinomi* ili kratko samo *polinomi*; i ako se, treće, na skupu ΣΠ ili $\mathcal{S}$ svih polinoma: $S_1,\ldots,S_{2^{2^\nu}}$ definiraju *algebarske* operacije: $\bar{}$, (·), +, označene isto kao veznici ili *izjavne (logičke)* operacije, tada se pozivom na sljedeću Definiciju 21.3.1.a dolazi do konkretne Lindenbaumove algebre L$\mathbf{A}_{\Sigma\Pi}$ ili L**A**($\mathcal{S}$). Po dogovoru, polinom S_1 je „polinom bez pribrojnika", tj. konstanta **0**. Polinom $S_{2^{2^\nu}}$ je polinom sa svim pribrojnicima kojih ima 2^ν, tj. konstanta **1**.

21.3.1.a. Definicija. Za polinome S i S' iz $\mathcal{S}$

1. $\overline{S}$ jednoznačno je pridruženi polinom podjednak izjavi $\overline{S}$ u $\mathbf{L}_\nu$.
2. SS' (a također i $S+S'$) jednoznačno je pridruženi polinom podjednak izjavi SS' (odnosno $S+S'$) u $\mathbf{L}_\nu$.

21.3.1.b. Ovo jednoznačno pridruživanje može se izvesti semantički primjenom računske metode istinosnih tablica, ili sintaktički primjenom pravila booleovske logike B$\mathbf{L}_\nu$, a to pokazuje da je algebarski pristup zamjenjiv logičkim, tj. da se može baratati bez algebarskih operacija, samo s logičkim operacijama, tj. s veznicima. Neka je u tom slučaju $\mathcal{S}^*$ neprazan pravi podskup skupa $\mathcal{S}$, a $\mathbf{L}(\mathcal{S}^*)$ izjavna logika na $\mathcal{S}^*$ s *makroatomima* i *makroizjavama* iz $\mathcal{S}^*$. Pri tome su $\overline{S}$, SS' i $S+S'$ induktivno definirani, s veznicima označenim isto kao u $\mathbf{L}_\nu$. Zato se može smatrati da je logika $\mathbf{L}(\mathcal{S}^*)$ sadržana u $\mathbf{L}_\nu$ i, posljedično, da se može prijeći s makroizjava na polinome. (Vidi podpoglavlje 21.3.3.a,b i 21.3.4.)

21.3.1.c. Polinomi su u uzajmično jednoznačnoj svezi s istinosnim funkcijama $\mathcal{F}$ ν istinosnih argumenata : $x_1,\ldots,x_\nu$: $F_1(x_1,\ldots,x_\nu)$, $F_2,\ldots,F_{2^{2^\nu}}$.

21.3.2. Potpuni i nepotpuni monomi

Osim polinoma važnu ulogu u nastavku imaju njihovi pribrojnici, tj. *jednočlani* polinomi oblika $\alpha_1^- \alpha_2^- \ldots \alpha_\nu^-$, zvani *monomi stupnja* ν ili *potpuni monomi*. Ovdje primjerice α_1^- označava jednoznačno α_1 ili $\bar{\alpha}_1$ ovisno o konkretnom monomu.

Osim potpunih monoma važnu ulogu u nastavku imaju također *višečlani* polinomi podjednaki izjavama iz $\mathbb{L}_\nu$ oblika $\alpha_{i1}^- \alpha_{i2}^- \ldots \alpha_{i\mu}^-$, $1 \le \mu < \nu, 1 \le i1 < i2 < \ldots < i\mu < \nu$, zvani *monomi stupnja* μ ili *nepotpuni monomi.*

Neka je $\mathcal{M}$ ili $\mathcal{M}^\nu$ skup svih potpunih monoma: $M_1, \ldots, M_{2^\nu}$.

Neka je $\mathcal{M}^\mu$ skup svih nepotpunih monoma stupnja μ: $M_1^\mu, M_2^\mu, \ldots\ M_k^\mu$, $k = \binom{\nu}{\mu} 2^\mu$.

Neka je $\mathcal{M}^*$ skup svih monoma, potpunih i nepotpunih, svih stupnjeva, tj. $\bigcup_{\lambda=1}^{\mu} \mathcal{M}^\lambda$.

21.3.2.a. Potpunim monomima pridružene su istinosne funkcije *f* ν istinosnih argumenata $x_1, \ldots, x_\nu : f_1(x_1, \ldots, x_\nu),\ f_2, \ldots, f_{2^\nu}$

21.3.2.b. Nepotpunim monomima stupnja μ pridružene su istinosne funkcije f^μ μ istinosnih argumenata $x_{i1}, \ldots, x_{i\mu} : f_1^{(\mu)}(x_{i1}, \ldots, x_{i\mu}), f_2^{(\mu)}, \ldots$; drugačije rečeno, njima su pridružene istinosne funkcije $f^{(\mu)}$ ν istinosnih argumenata $x_1, \ldots, x_\nu : f_1^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_\nu), f_2^{(\mu)}, \ldots$, među kojima su $x_{i1}, \ldots, x_{i\mu}$ *stvarni (aktualni)* argumenti o kojima funkcija bitno ovisi, a ostali su *prividni (fiktivni)* o kojima funkcija bitno ne ovisi.

21.3.3. Skupovi $\mathcal{P}$, $\mathbb{L}(\mathcal{P})$, $\mathcal{S}(\mathcal{P})$, $\mathcal{M}^*(\mathcal{P})$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{P})$

21.3.3.a. Definicija. Neka je $\mathcal{P}$ skup polinoma $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $n \ge 2$, $n < 2^{2^\nu}$, iz $\mathcal{S}$. Polinome na skupu $\mathcal{P}$ proglasimo „velikim atomima" nazivajući ih *makroatomima*. Tada induktivno definiramo „velike izjave" nazivajući ih *makroizjavama.*

1. Makroatomi su makroizjave.
2. Ako su S i S' makroizjave, tada su S, $S\bar{S}$ i $S + S'$ makroizjave.

   Neka je $\mathbb{L}(\mathcal{P})$ skup svih makroizjava zvan *logika makroizjava*.

Budući da je svaka makroizjava iz $\mathbb{L}(\mathcal{P})$ sadržana u $\mathbb{L}_\nu$, možemo joj jednoznačno pridružiti podjednaki polinom u $\mathcal{S}$.

21.3.3.b. Definicija. Neka je $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ skup svih tako pridruženih polinoma koji se nazivaju *zavisni od polinoma iz* $\mathcal{P}$.

21.3.3.c. Definicija. Na sličan se način monomi u skupu $\mathcal{M}^*(\mathcal{P})$ svih monoma bilo kojeg stupnja na skupu $\mathcal{P}$: $P_{i1}^- P_{i2}^- \cdots P_{i\lambda}^-$, $1 \le \lambda \le \nu$ proglase $\mathcal{M}^*$-*makroatomima* i tada se induktivno definiraju $\mathcal{M}^*$-*makroizjave* (logike makroizjava $\mathbb{L}_{\mathcal{M}^*(\mathcal{P})}$ sadržane u $\mathbb{L}_\nu$), a njima se pridružuju podjednaki polinomi. Neka je $\mathcal{S}_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{P})$ skup svih tako pridruženih polinoma koji se nazivaju *zavisni od monoma iz* $\mathcal{P}$.

21.3.4. Rastav skupa $\mathcal{P}$

Neka je $\mathcal{A}: A_1, \ldots, A_r$ neprazan pravi podskup skupa $\mathcal{P}$ *reda r* , tj. $1 \leq r < n$, a $\mathcal{B}: B_1, \ldots, B_{n-r}$ pridruženi dopunski podskup do $\mathcal{P}$ *reda n – r.*

Neka je $\mathcal{A}$ / $\mathcal{P}$ / $\mathcal{B}$ *dvočlani (uređeni) rastav* skupa $\mathcal{P}$ na podskupove-rastavnice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Pozivom na definiciju 21.3.3.a skupovi $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ i $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ skupovi su polinoma sadržani u $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ i *zavisni od* polinoma u $\mathcal{A}$ odnosno u $\mathcal{B}$.

21.4. Definicija

Jaka međusobna sadržajna nezavisnost različitih $n \geq 2$ sudova $P_1, P_2, \ldots, P_n$ skupa $\mathcal{P}$, označena $IND(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ ili $IND(\mathcal{P})$, određuje se na sljedeći način (11).

(11) $IND(\mathcal{P}) :\Leftrightarrow$ za svaki rastav $\mathcal{A}$ / $\mathcal{P}$ / $\mathcal{B}$, svaki polinom *A* iz skupa $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ po definiciji (11.a) i svaki polinom *B* iz skupa $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ po definiciji (11.b) vrijedi $w(A|B) = w(A)$ [ili $w(AB) = w(A)w(B)$], ali PAZI, pod uvjetom da skupovi $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ nisu prazni.

(11.a) $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) := \mathcal{S}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

(11.b) $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) := \mathcal{S}(\mathcal{A}) / \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

OPASKA: Taj uvjet nepraznosti zahtijeva dodatno istraživanje od samog početka odabranog skupa $\mathcal{P}$ i njegovog rastava $\mathcal{A}$ / $\mathcal{P}$ / $\mathcal{B}$ na rastavnice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Prvo, treba pronaći pogodan nužan i dovoljan uvjet da skupovi $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ budu neprazni. Drugo, treba istražiti ima li presjek $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{S}(\mathcal{B})$, osim već po dogovoru uklonjene logičke ništice i logičke jedinice, još drugih elemenata, tj. treba pronaći pogodan nužan i dovoljan uvjet da takvih zajedničkih elemenata u $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ i $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ ne bude. Očito je da *simetrični elementi P* i $\overline{P}$ u $\mathcal{P}$ (a možda i drugi) proizvode zajedničke elemente.

POUKA. Pojam jake nezavisnosti *IND* ($\mathcal{P}$) ostvaren na osnovi složenog slučaja opće ideje presložen je da bi bio poželjan u primjeni, a pored toga moralo bi ga se osloboditi suvišnih sastojaka i teorijski tek opravdati naknadnim istraživanjem.

Zato, pokaže li se da *IND* ($\mathcal{P}$) ni teorijski ne daje nove uvide u problematiku jake sadržajne nezavisnosti, on postaje samo još jedan među mnogim znanim primjerima lijepe opće ideje, ali bez većeg ili ikakvog značaja, iako postoji mogućnost da okolinska istraživanja budu iskorištena u druge svrhe.

21.5. Isključivanje suvišnih pravila i ograničenja

Nadalje treba istražiti mogućnost isključivanja suvišnih pravila i ograničenja do razumne ili čak do najveće moguće mjere, tj. do nezavisnog sustava pravila i ograničenja.

Posebice bi bilo važno istražiti svezu Definicije 21.4 vezano za $\mathcal{S}$ ($\mathcal{P}$) iz Definicije 21.3.3.b i moguće Definicije $IND_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{P})$ vezano za $\mathcal{M}^*$ ($\mathcal{P}$) i $\mathcal{S}_{\mathcal{M}^*}(\mathcal{P})$ iz Definicije

21.3.3.c.

Nastavak slijedi u podpoglavlju 21.9, gdje se ova spomenuta vrlo zahtjevna opća problematika upitne vrijednosti obrađuje pojednostavljeno.

21.6. Definicija

Formalna nezavisnost $n \geq 2$ sudova $P_1, P_2, \ldots, P_n$ skupa $\mathcal{P}$, označena $FIND(\mathcal{P})$, određuje se na nekoliko načina od kojih su dva podjednaka najistaknutija. Prvi se objašnjava *zavisnim sustavom* 2^n *jednolikih pravila množenja* (12).

$$(12) \qquad w\left(\prod P_i^-\right) = \prod w\left(P_i^-\right),$$

gdje $\prod P_i^-, 1 \leq i \leq n$, označava umnožak $P_1^- P_2^- \cdots P_n^-$, a P_i^- po volji P_i ili $\overline{P}_i$, neovisno o i, s dodatkom da u (12) istoimeni izbori za P_i^- slijeva i zdesna moraju biti jednaki.

21.7. Nezavisan sustav standardnih pravila

Drugi način se objašnjava *nezavisnim sustavom* $2^n - n - 1$ *standardnih pravila množenja*.

21.8. Sadržajno osmišljavanje

Pojam formalne nezavisnosti po Definiciji 21.6 ili 21.7 može se sadržajno osmisliti s ciljem postizanja prihvatljivog i dobro zasnovanog sadržajnog pojma tako da se formalan pojam sadržajno proširi dodatnim ograničenjima i time opsegom suzi. Na taj se način od formalnog pojma dolazi do sadržajno osmišljenog pojma nezavisnosti. Takav sadržajno prošireni pojam trebalo bi nazvati *nuždan i dovoljan uvjet sadržajne nezavisnosti jednolikim pravilima množenja.*

21.9. Monomske nezavisnosti $\mathcal{M}^*$-*ind* ($\mathcal{P}$) i $\mathcal{M}$-*ind* ($\mathcal{P}$)

21.9.a. Definicija $\mathcal{M}^*$-ind ($\mathcal{P}$)

$\mathcal{M}^*\text{-}ind(\mathcal{P}) :\Leftrightarrow$ za svaki rastav $\mathcal{A}/\mathcal{P}/\mathcal{B}$, svaki A iz $\mathcal{M}^*(\mathcal{A})$ i svaki B iz $\mathcal{M}^*(\mathcal{B})$ $FIND(A,B)$ & $w(AB) > 0$.

21.9.b. Definicija $\mathcal{M}$-*ind* ($\mathcal{P}$)

$\mathcal{M}\text{-}ind(\mathcal{P}) :\Leftrightarrow$ za svaki rastav $\mathcal{A}/\mathcal{P}/\mathcal{B}$, svaki A iz $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ i svaki B iz $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ $FIND(A,B)$ & $w(AB) > 0$.

21.9.c. Primjedba. Ovdje su uklonjena gotovo sva suvišna pravila i pripadna ograničenja. Daljnje uklanjanje dovodi do sadržajne jednolike nezavisnosti iz podpoglavlja 21.8.

H. ZADATCI

22.1. Dokaži da su uvjeti $AB = \mathbf{0}$ i $A \to \overline{B} = \mathbf{1}$ podjednaki.

Iz $AB = \mathbf{0}$ slijedi $\overline{AB} = \mathbf{1}$, a tada $\overline{A} + \overline{B} = \mathbf{1}$ i $A \to \overline{B} = \mathbf{1}$.

Obrnuto, iz $A \to \overline{B} = \mathbb{1}$ slijedi $\overline{A} + \overline{B} = \mathbb{1}$, a tada $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \mathbb{0}$ i $\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} = \mathbb{0}$ i $AB = \mathbb{0}$.

22.2. Dokaži pravilo $w(A \mid AB) = 1$, uz uvjet $w(AB) > 0$.

22.3. Dokaži pravilo $w(A + B \mid A) = 1$, uz uvjet $w(A) > 0$.

22.4. Dokaži pravilo $w(B \mid A(A \to B)) = 1$, uz uvjet $w(AB)$

22.5. Ako je $A \to B = \mathbb{1}$, onda je $w(A) \le w(B)$.

$$A \to B = \mathbb{1}$$
$$\overline{A} + B = \mathbb{1}$$
$$w(\overline{A}) + w(B) - w(\overline{A}B) = 1$$
$$1 - w(A) + w(B) = 1 + w(\overline{A}B)$$
$$w(B) - w(A) = w(\overline{A}B) \ge 0$$
$$w(B) \ge w(A)$$

22.6. Uz koje uvjete vrijedi pravilo „dvije jedinice": Ako je $A \to B = \mathbb{1}$, onda je $w(B \mid A) = 1$.

$$A \to B = \mathbb{1}$$
$$\overline{A} + B = \mathbb{1}$$
$$\overline{\overline{A} + B} = \mathbb{0}$$
$$\overline{\overline{A}}\,\overline{B} = \mathbb{0}$$
$$A\overline{B} = \mathbb{0}$$
$$w(\overline{B} \mid A) w(A) = 0$$
$$w(\overline{B} | A) = 0 \text{ ili } w(A) = 0$$

$1 - w(B \mid A) = 0$ ako je $w(A) > 0$ (a to je K-ograničenje koje odbacuje drugi slučaj), dakle $w(B \mid A) = 1$.

22.7. U prethodnim zadatcima koristili smo se poučkom: Iz $A = B$ slijedi $w(A) = w(B)$. Ako se vjerojatnosna funkcija w definira na skupu razreda $\mathbb{L}_\nu /_{\approx}$ ili na skupu $\mathcal{S}$ polinoma, tada se w proširuje na cijeli skup $\mathbb{L}_\nu$ upravo pomoću navedenog poučka. Ali ako se w definira na $\mathbb{L}_\nu$, tada se poučak mora dokazati (sintaktički ili semantički).

22.8. Dokaži Bayesov poučak:

$$w(A|B) = \frac{w(A)}{w(B)} w(B|A).$$

Uputa: Primijeni dva puta pravilo umnoška uzevši u obzir algebarski zakon $AB = BA$. Pazi, ograničenja za to su $w(A) > 0$ i $w(B) > 0$.

Dokaži opći Bayes-Laplaceov poučak. Uz koja ograničenja vrijedi opći poučak?

22.9. Uz koji uvjet vrijedi pravilo: $w(A|B(A \to B)) > w(A|A \to B)$?

To je posljedica Bayesovog poučka i probabilističkog uvjeta $w(B|A \to B) < 1$ (uz primjenu algebarskog zakona $A(A \to B) = AB$ i probabilističkog zakona $w(B|AB) = 1$, uz uvjet dakako $w(B(A \to B)) > 0$ i uvjet $w(A \to B) > 0$ koji iz njega slijedi).

22.10. Obrazloženi pojam jake sadržajne nezavisnosti *IND* ($\mathcal{P}$) skupa $\mathcal{P}$ nepodjednakih izjava, tj. sudova $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $n \geq 2$, *najjači* je među mogućim pojmovima sadržajne nezavisnosti. Zapravo, Definicija 21.4 jake sadržajne nezavisnosti *IND* ($\mathcal{P}$) upitne je vrijednosti sve dok se njezina teorija dovoljno ne razvije i dok se ne dokažu poučci o njezinoj teorijskoj i primijenjenoj vrlini. To pak u ovom članku nedostaje jer se u njemu samo raspravlja o problematici jake nezavisnosti i izlaže priprema za daljnje istraživanje.

Oslabljivanjem navedenog pojma *zavisnosti od* može se dobiti podjednak ili pak bitno slabiji pojam od pojma jake nezavisnosti. Odredi pojam *najslabije* sadržajne nezavisnosti *Ind* ($\mathcal{P}$).

Literatura:

1. [Cox 1946] Cox, R.T., Probability, Frequency and Reasonable Expectation, *American J. of Physics* 14(1), 1-13.
2. [Cox 1961] Cox, R.T., *The Algebra of Probable Inference*, The John Hopkins Press, Baltimore, 1961.
3. [Galavotti 2001] Galavotti, M.C., Subjectivism, Objectivism and Objectivity in Bruno de Finetti's Bayesianism, 161-174 in D. Corfield and J. Williamson, eds., *Foundations of Bayesianism*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
4. [Halpern 1999] Halpern, J.Y., Cox'sTheorem Revisited, *J. of Artificial Intelligence Research* 11(1999), 429-435.
5. [Jeffries 1931] Jeffries, H., *Scientific Inference*, Cambridge University Press, Cambridge, 1931.
6. [Jeffries 1939] Jeffries, H., *Theory of Probability*, Claredon, Oxford, 1939., 2nd ed. 1948., 3rd ed. with modifications 1961.
7. [Keynes 1921] Keynes, J.M., *A Treatise on Probability*, McMillan, London, 1948.
8. [Kolmogoroff 1933] Kolmogoroff, A., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Reprint, Springer, Berlin, 1973.
9. [Loredo 1990] Loredo, T.J., From Laplace to Supernova SN1987A: Bayesian Inference in Astrophysics, 81-142 in P.F. Fougère, ed., *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Kluwer, Dordrecht, 1990.
10. [McClennen 2001] McClennen, E.P., Bayesianism and Independence, 291-308 in D. Corfield and J. Williamson, eds., *Founditions of Bayesianism*, Kluwer, Dordre-

cht, 2001.

11. [Paris & Vencovská 2001] Paris, J. and Vencovská, A., Common Sence and Stochastic Independence, 203-240 in D. Corfield and J. Williamson, eds., *Founditions of Bayesianism*, Kluwer, Dordrecht, 2001.
12. [Ramsey 1926] Ramsey, F.P.,Truth and Probability, 23-52 in H.E. Kyburg and H.E. Smokler, eds., *Studies in Subjective Probability*, R.E. Kreger, Huntington, New York, 1926.
13. [Williamson 2009] Williamson, J., Philosophies of Probability, 493-533 in A.D. Irvine, ed., *Philosophy of Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 2009.
14. [David 1961] David, F.N., *Games, Gods and Gambling. The origin and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era*, Charles Griffin & Co., London, 1961.
15. [Todhunter 1949] Todhunter, I., *A History of the Mathematical Theory of Probability from Time of Pascal to that of Laplace*, Chelsea, New York, 1949. (Preslika izvornika iz 1865.)
16. [Hatzivelkos 2012] Hatzivelkos, A., Što je teorija uzročnosti?, *Poučak* 50 (2012), 12-24.
17. [Hatzivelkos 2013] Hatzivelkos, A., Uvod u identifikabilnost (rukopis).
18. [Lauc & Šikić 2014] Lauc, D. and Šikić, Z., *Logika – udžbenik u trećem razredu gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.
19. [Šeper 2013] ovaj članak (prepravljen 2015.).
20. [Šeper 2013] Šeper, K., Strong and weak contentual independence in Bayesian probabilistic logic (rukopis prepravljen 2015.).
21. [Šikić 2012] Šikić, Z., Fisherovo testiranje hipoteza i Laplaceovo računanje vjerojatnosti, 554-562 u *Zborniku radova 5. kongresa nastavnika matematike*, Profil, Zagreb, 2012.
22. [Šikić 2013] Šikić, Z., What is probability and why does it matter, http://sikic.files.wordpress.com/2012/3/whatisprobability.pdf (rukopis objavljen u *European Journal of Analytic Philosophy* (EuJAP), Vol. 10, No. 1 (2014)).
23. [Šikić 2014] Šikić, Z., On probable conditionals, Četvrta nacionalna Konferencija *Verovatnosne Logike i njihove primene, Knjiga apstrakata*, Beograd, Srbija, 2. oktobar 2014.
24. [Takeuti & Zaring 1973] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Axiomatic Set Theory*, Springer, New York, 1973.
25. [Vuković 2009] Vuković, M., *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.
26. [Wang, G.-J. et al., 2002] Guo-Jun Wang, Li Fu, Jian Sha Song, *Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic, Science in China (Series A)*, 2002, 45(9):1106-1116.