Težišnica
Jedna lagana pokazna vježba za srednjoškolce

Dubravko Sabolić[1] i Roman Malarić[2]

Uvod

Učenje matematike ima velik značaj u formiranju učenikovih sklonosti pojedinim stručnim ili znanstvenim disciplinama, kao i sposobnosti učinkovitog svladavanja gradiva u kasnijim godinama školovanja u čitavom nizu područja, od prirodoslovno-matematičkih, preko tehničkih, pa do društvenih, a možda i šire. U mnogim studijama, npr. Gimerson, Egeland i Teo [1], dokazano je da je rano uspješno upoznavanje s osnovnim matematičkim konceptima dobar prediktor kasnijeg uspjeha u školovanju. Poznato je i da djeca koja su u ranom razdoblju školovanja došla do određenog stupnja poznavanja napose geometrije imaju u prosjeku veću vjerojatnost za postizanje uspjeha u kasnijim fazama školovanja, i to ne samo iz matematike. Primjerice, Evans, Swinton i Thomas u [2] izlažu rezultate svojih istraživanja, prema kojima je uspjeh u srednjoškolskom obrazovanju u području ekonomije značajno čvršće koreliran s uspjehom u geometriji, nego li u algebri. Prema toj i sličnim studijama, geometrija je mjerljivo bolji prediktor kasnijeg školskog uspjeha od drugih temeljnih područja školske matematike. Levenson, Tirosh i Tsamir u [3] izlažu da geometrija nije važna samo zbog toga što predstavlja jedno od temeljnih područja u (ranom) matematičkom obrazovanju, već da unapređuje vizualne i analitičke sposobnosti djece, odnosno učenika, za kreiranje dobro definiranih koncepata također i u drugim područjima znanja.

U ovom radu dat ćemo jedan primjer za koji držimo da je dovoljno jednostavan za razinu prvog ili drugog razreda srednje škole, preko kojeg si učenici mogu kroz samostalan rad, i/ili uz vođenje nastavnika, objasniti pojam težišnice trokuta i još neke očigledne geometrijske činjenice u vezi s njom, koristeći se elementarnom analitičkom geometrijom kao pomoćnim alatom. Osim uočavanja nekih geometrijskih odnosa u trokutu, učenik se potiče na precizno formuliranje problema, nakon kojega se primjenom jednostavnih algebarskih operacija dolazi do zanimljivog rješenja koje možda i pomalo nadilazi početna ograničena očekivanja.

[1] Dubravko Sabolić, vanjski suradnik Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu
[2] Roman Malarić, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu

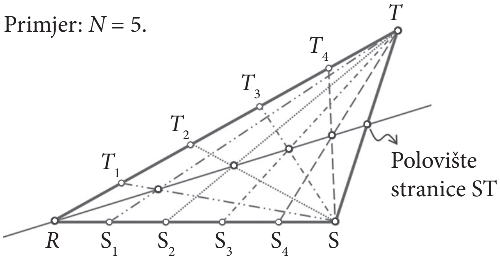
Formuliranje problema

Neka je zadan trokut RST, poput onog nacrtanog na *slici 1*. Neka je svaka od stranica RS i RT podijeljena na N jednakih dijelova, $N \in [2,\infty\rangle$. Neka su točke koje dijele navedene stranice označene redom kao:

- $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{N-1}$: točke koje dijele stranicu RS na N jednakih dijelova;
- $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{N-1}$: točke koje dijele stranicu RT na N jednakih dijelova.

Navedeni nizovi točaka na svakoj stranici uređeni su slijedom indeksa, tako da je točka s nižim indeksom bliža vrhu R. Potrebno je dokazati sljedeću tvrdnju:

Sjecišta svih uređenih parova dužina: $ST_1 \cap TS_1$, zatim $ST_2 \cap TS_2$, zatim $ST_3 \cap TS_3$, itd., sve do $ST_{N-1} \cap TS_{N-1}$, nalaze se na istom pravcu, i to upravo onom koji prolazi kroz vrh R i polovište stranice ST, bez obzira na veličinu broja N.



Slika 1.

Taktika dokazivanja

Pogledaju li se točke, na primjer S_4 i T_4 na gornjoj slici, očigledno je da one dijele stranicu RS odnosno RT u identičnom omjeru. Isto svojstvo vrijedi i za bilo koji drugi od uređenih parova diobenih točaka, S_i i T_i, $i \in [1, N-1\rangle$. Općenito, diobeni omjeri su jednaki i/N, i kada N teži prema beskonačnom, najveći mogući iznos diobenog omjera teži ka 1. Primijetimo da „rezolucija" podjele stranica RS i RT biva to „finija" što je N veći. Taktika dokazivanja svodi se na to da se dokaže da za bilo koji pojedinačni diobeni omjer i/N vrijedi svojstvo da pravac povučen kroz vrh R i sjecište dužina $ST_i \cap TS_i$ prolazi kroz polovište stranice ST. Ako to dokažemo, onda je očito da sve točke nastale na opisani način sigurno leže na istom tom pravcu (koji je, uzgred, ujedno i jedna od težišnica trokuta RST).

Dokaz se može izvesti i u jačoj formi od minimalno potrebne. Naime, u našem zadatku svi diobeni omjeri su razlomci, dakle racionalni brojevi. Lako je, međutim, pokazati da opisano svojstvo vrijedi za sve realne brojeve, pa tako onda i za sve racionalne. Drugim riječima, pravac koji punimo svim mogućim sjecištima $ST_\# \cap TS_\#$, gdje # označuje dijeljenje u bilo kakvom realnom diobenom omjeru (ne nužno racionalnom), jest „gust".

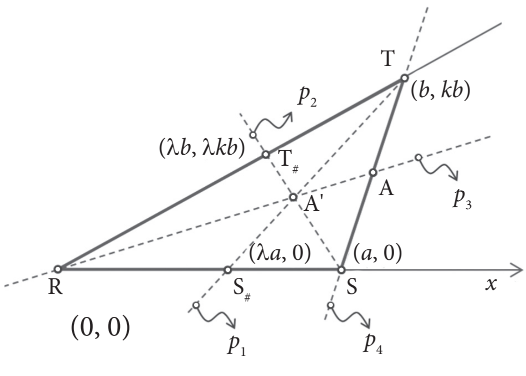
Dokazivanje

Dokazivanje je tehnički jednostavno provesti služeći se analitičkom geometrijom. Vrh R postavit ćemo u ishodište koordinatnog sustava. Stranica RS neka leži na x-osi, tj. na pravcu s jednadžbom $y = 0$. Stranica RT ležat će tada na pravcu s jednadžbom $y = kx$, gdje je k koeficijent smjera koji u naravi odgovara tangensu kuta RS $\angle$ RT. Neka se vrh S nalazi na koordinatama $(a, 0)$, a vrh T na koordinatama (b, kb).

Na *slici 2* nacrtan je trokut RST, identičan onome sa slike 1, kao i x-os koordinatnog sustava na koju smo smjestili stranicu RS, i to tako da je točku R u ishodištu, te ima koordinate $(0, 0)$, dok točka S ima koordinate $(a, 0)$. Dalje, na slici je označena i linija jednadžbe $y = kx$ na koju je smještena stranica RT. Ako pretpostavimo da apscisa točke T ima iznos b, onda njena ordinata ima iznos kb. Definirajmo proizvoljan broj λ, $\lambda \in \mathbf{R}$, i obilježimo točke $S_\#$ i $T_\#$, s koordinatama $(\lambda a, 0)$ i $(\lambda b, \lambda kb)$. Te dvije točke dijele, svaka onu stranicu trokuta na kojoj leži, u istim omjerima. U posebnim slučajevima, kada je $\lambda = 0$, točke $S_\#$ i $T_\#$ obje padaju u točku R, a kada je $\lambda = 1$, tada one postaju jednake točkama S i T. Za $0 < \lambda < 1$ točka $S_\#$ nalazi se između točaka R i S (dakle, na stranici RS), a točka $T_\#$ nalazi se između točaka R i T (dakle, na stranici RT). Za bilo koji iznos λ vrijedi jednakost:

$$\left|\mathrm{RS}_\#\right| / \left|\mathrm{RS}\right| = \left|\mathrm{RT}_\#\right| / \left|\mathrm{RT}\right|.$$

Na *slici 2* označena su i četiri pravca, p_1, p_2, p_3 i p_4, koji će nam trebati u dokazivanju polazne tvrdnje.



Slika 2.

Izvest ćemo najprije jednadžbe pravaca p_1 i p_2:

$$p_1: \qquad y - 0 = \frac{0 - kb}{\lambda a - b}(x - \lambda a) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{kb}{\lambda a - b}x + \frac{\lambda akb}{\lambda a - b}.$$

$$p_2: \qquad y - 0 = \frac{0 - \lambda kb}{a - \lambda b}(x - a) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{\lambda kb}{a - \lambda b}x + \frac{\lambda akb}{a - \lambda b}.$$

Izjednačavanjem desnih strana ove dvije jednadžbe dobiva se uvjet za $x_{A'}$, tj. za apscisu točke A':

$$p_1 \cap p_2 : \qquad x_{A'}\left(\frac{\lambda kb}{a-\lambda b}-\frac{kb}{\lambda a-b}\right)=\lambda akb\left(\frac{1}{a-\lambda b}-\frac{1}{\lambda a-b}\right) \quad ;$$

$$x_{A'}\frac{\lambda(\lambda a-b)-(a-\lambda b)}{(a-\lambda b)(\lambda a-b)}=\lambda a\frac{(\lambda a-b)-(a-\lambda b)}{(a-\lambda b)(\lambda a-b)} \quad .$$

Slijedi:

$$x_{A'}=\frac{\lambda a(\lambda a-b)-\lambda a(a-\lambda b)}{\lambda(a-\lambda b)-(a-\lambda b)}=\frac{\lambda^2a^2-\lambda ab-\lambda a^2+\lambda^2ab}{\lambda^2a-\lambda b-a+\lambda b}=\frac{a^2\lambda(\lambda-1)+ab\lambda(\lambda-1)}{a(\lambda-1)(\lambda+1)}=$$
$$=(a+b)\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Uvrštenjem u jednadžbu za p_1 dobiva se i ordinata točke A':

$$y_{A'}=-\frac{(a+b)\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{kb}{\lambda a-b}+\frac{\lambda akb}{\lambda a-b}=\frac{\lambda kb}{\lambda a-b}\left(-\frac{a+b}{\lambda+1}+a\right)=\frac{\lambda kb}{\lambda a-b}\left(\frac{-a-b+\lambda a+a}{\lambda+1}\right)=$$
$$=kb\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Primijetimo da koordinate točke A' odgovaraju koordinatama polovišta stranice ST, korigiranima faktorom 2λ/(λ+1). Naime, koordinate tog polovišta odmah su nam poznate jer su koordinate točaka S i T zadane. Apscisa i ordinata polovišta stranice ST imaju iznose jednake aritmetičkim sredinama između apscisa odnosno ordinata točaka S i T.

Jednadžbu pravca p_3 lako je izvesti s obzirom da on prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava, i da smo upravo izračunali koordinate jedne točke na njemu:

$$p_3: \qquad y=\frac{y_{A'}}{x_{A'}}x \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{kb}{a+b}x.$$

Primijetimo da jednadžba ovog pravca uopće ne ovisi o λ. To znači da sve točke nastale na isti način kao A', bez obzira na iznos λ, leže upravo na tom pravcu. Ako je λ između 0 i 1, točka A' nalazi se unutar trokuta. Ako je λ < 0, ona se nalazi izvan trokuta, lijevo od točke R, a ako je λ >1, A' je izvan trokuta, desno od točke A. Kad je λ = 0, sjecište A' poklapa se s točkom R, a kad je λ = 1, A' poklapa se s A.

Sada još samo treba dokazati da pravac p_3 prolazi točno kroz polovište stranice ST. Da bismo to dokazali, izvest ćemo najprije jednadžbu pravca p_4 na kojemu leži stranica ST:

$$p_4: \qquad y-0=\frac{0-kb}{a-b}(x-a) \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{kb}{a-b}x+\frac{akb}{a-b}.$$

Izjednačavanjem desnih strana jednadžbi pravaca p_3 i p_4 dobivamo uvjet za apscisu točke A:

$$p_3 \cap p_4: \qquad x_A\left(\frac{kb}{a+b}+\frac{kb}{a-b}\right)=\frac{akb}{a-b}.$$

Slijedi:

$$x_A=\frac{akb}{a-b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)kb+(a+b)kb}=\frac{a(a+b)}{2a}=\frac{a+b}{2}.$$

Ordinata točke A dobije se najjednostavnije uvrštenjem x_A u jednadžbu pravca p_3:

$$y_A=\frac{kb}{a+b}x_A=\frac{kb}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2}=\frac{kb}{2}.$$

Kako iz definicije problema vidimo da su koordinate polovišta stranice ST jednake $\left(\frac{a+b}{2},\frac{kb}{2}\right)$, očito je točka A, u kojoj pravac p_3 siječe stranicu ST, ujedno i polovište te stranice. Time smo završili dokaz polazne tvrdnje.

Što još učenik može uočiti/naučiti rješavajući ovaj problem?

- Ako pravac p_3 „napučujemo” točkama koje nastaju opisnim procesom, uz dijeljenje stranica RS i RT na N jednakih dijelova, ma kako velik bio broj N (tj. ma kako fino bile stranice podijeljene), pravac p_3 bit će „rijetko nastanjen” skupom diskretnih točaka koje leže na p_3, a koje su sve manje razrijeđene kako se približavamo polovištu stranice ST (vidjeti *sliku 1.*). Naime, te točke odgovarat će razlomcima oblika i/N između kojih postoje „rupe” (u koje ulazi beskrajno mnoštvo preostalih racionalnih, te iracionalnih i transcedentnih brojeva kojih u ovako formuliranom zadatku nema). Nasuprot tome, ako pravac „punimo” pomoću svih (realnih) λ vrijednosti, on će biti „gusto pokriven”, odnosno na njemu neće biti preostalih „slobodnih mjesta” za nastanjivanje bilo koje druge točke.
- Pažljiviji učenik primijetit će da svi trokuti tipa TS_iS_{i+1} (vidjeti *sliku 1.*) imaju jednake površine. Zatim, primijetit će i da svi trokuti tipa ST_iT_{i+1} također imaju jednake površine. Najzad, primijetit će i da svaki trokut jednog od ovih tipova ima jednaku površinu kao bilo koji trokut onog drugog tipa. Učenicima se može zadati da riječima „dokažu” (tj. opravdaju) te činjenice, te da potom napišu dokaz.
- Trokuti RSA i RTA (vidjeti *sliku 2.*) imaju jednake površine. Učenicima se može također zadati da to opravdaju verbalno, pa onda i formalno jer se, kao i u prethodnom primjeru, radi o dosta očiglednim činjenicama. To se pak može povezati sa značenjem riječi „težišnica”. Naime, linija koja spaja vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice dijeli trokut na dva dijela jednakih površina. Ako je trokut „homogen” (tj. ako ima jednaku težinu po jedinici površine na svim svojim dijelo-

vima), onda ta linija također dijeli trokut na dva jednako teška dijela. Odatle naziv težišnica i zbog toga težišnica prolazi baš kroz vrh trokuta i polovište nasuprotne mu stranice.

- Napokon, eto i odgovora kako praktično najlakše podijeliti bilo koji trokut (npr. trokutastu parcelu zemlje, trokut sira ili trokut torte) na dva dijela jednake težine. Dalje, s obzirom da se svaki zatvoreni lik s pravocrtnim stranicama može savršeno podijeliti u trokute, učeniku se može zadati da grafički i verbalno pokaže kako se neki takav lik može podijeliti na dva jednako teška dijela, te kako to izgleda ako je geometrijski lik simetričan, odnosno ako ima paran ili neparan broj stranica.
- „Igra" s iznosom parametra λ uvijek je poučna za učenika srednjoškolskog uzrasta jer mu omogućuje vizualizaciju procesa „iscrtavanja" pravca p_3. U ovom primjeru, pozicija presječne točke A' prilagođava se samo jednim parametrom, λ. Kako je on samo jedan, i „broj stupnjeva slobode" u tom podešavanju je samo jedan, odnosno točka A' ne može biti bilo gdje u ravnini već samo na pravcu p_3 koji je pak potpuno određen točkom ishodišta R, s koordinatama (0, 0) te konstantama a, b i k koje su zadane i time neovisne o broju λ. Učeniku se može zadati da pronađe formulu i skicira funkciju udaljenosti točke A' od ishodišta R u ovisnosti o parametru λ.

Literatura

1. Jimerson, S., Egeland, B., Teo, A., *A longitudinal study of achievement trajectories: Factors associated with change*, Journal of Educational Psychology, 91(1), 116-126.
2. Evans, B.A., Swinton, J.R., Thomas, M.K., *The Effects of Algebra and Geometry Skills on Performance in High School Economics*, Perspectives on Economic Education Research 9(2) 54-64, http://www2.isu.edu/peer/links/full/evans.pdf (25. 10. 2016.).
3. Levenson, E., Tirosh, D., Tsamir, P., Preschool Geometry – Theory, Research, and Practical Perspectives, Sense Publishers, 2011, https://www.sensepublishers.com/media/785-preschool-geometry.pdf (25. 10. 2016.).