ČAROBMATIČKA PRIČA: ODREĐIVANJE DANA U TJEDNU IZ ZADANOG DATUMA

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb

U nekim prijašnjim Matkama izlazile su priče o čarobnjacima i o njihovoj čarobmatičkoj školi u koju su se mogli upisati svi oni koji su znali da postoje nevidljive i vidljive stvari, koji su bili dovoljno radoznali, a zanimala ih je i čarobmatika. Nakon završetka te škole čarobnjaci su mogli vidjeti i ono što je nama nevidljivo.

Eto, zato i postoje te škole za čarobnjake gdje se uče zadatci kao što su:

– Postavljenje pravih pitanja,

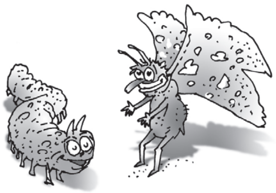
– Čitanje misli, namjera i odluka,

– Razmišljanje, dokazivanje i pronalaženje rješenja teških problema.

Znam, reći ćete:

– *Hm... to je bar jednostavno. Postavljanje pitanja? PA TO ZNAJU I MALA DJECA!*

Da, to je točno. Mala djeca znaju postavljati pitanja. No, kako odrastamo, polako počinjemo zaboravljati postavljati prava pitanja. Jer, pitanja za koja mi mislimo da su prava, nisu prava nego obična. Pitanja poput, primjerice, kolika je cijena kilograma kruha ili čokolade, koliko si visok, koliko je sada sati u Zagrebu i slično – obična su i svakodnevna pitanja.



Prava pitanja su pitanja poput ovih:

– *Kako nastaje duga?*

– *Sjeća li se leptir života kada je bio gusjenica ili kukuljica?*

– *Zašto je nebo plavo?*

– *Kako nastaje vjetar?*

Malo veća djeca postavljaju malo drukčija pitanja:

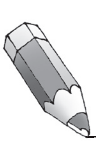
– *Zašto se led topi baš na 0 °C?*

– *Zašto voda prelazi u paru na otprilike 100 °C, ovisno o vanjskom pritisku zraka?*

– *Kako to da i snježna pahuljica, i vodena para, i kap kiše imaju isti kemijski sastav H_2O, a različitog su agregatnog stanja? Koja im svojstva atoma ili molekula to omogućuju?*

Još veća djeca muku muče s ovakvim pitanjima:

– *Koja li se tajna krije u Higgsovu bozonu i na koja će nam pitanja znanosti ta čestica dati odgovor? Što je to, uopće, Higgsov bozon? Je li to stvarno čestica ili tek treptaj energije? Je li to nešto poput magnetizma? Daje li uistinu masu*



drugim česticama materije? Što su to strune energije? Koliko ih ima?

– *Hoće li teorija struna uspjeti povezati Einsteinovu teoriju relativnosti i kvantnu mehaniku?*
– *Što je to tamna materija i tamna energija?*
– *Zašto je matematika beskonačnih skupova potpuno drukčija od matematike konačnih skupova? Kako to da beskonačni skup može biti jednak svome pravom podskupu? Ako je svemir beskonačan, kako tvrde neke astronomske teorije, je li i on jednak nekom svome pravom podskupu?*
– *Što je to supersimetrija?*
– *Može li umjetnost biti objektivna? Što je to objektivna stvarnost? Postoji li uopće? Postoji li istinita i točna interpretacija povijesnih događanja?*

Pronalaženje odgovora na takva pitanja nije nimalo jednostavno. I to treba učiti, dugo i postupno. A prije svega toga treba naučiti misliti, razmišljati, zaključivati, slušati, promišljati, vagati, procjenjivati, dokazivati. Treba se učiti strpljivosti, odgovornosti, pa čak i disciplini da se završi započeti zadatak umjesto da se kod prve poteškoće odustane.

Upravo prije početka čarobmatičke školske godine čarobnjak Baltazar morao je otputovati u budućnost kako bi provjerio utjecaj i posljedice na atmosferu koje ostavljaju ratovi koji se trenutačno odvijaju na Zemlji. Za taj put u budućnost koristio je kvantne skokove i kvantne tunele kroz prostor i vrijeme. U nekim filmovima i TV-serijama te tunele zovu *crvotočinama*.

Zadatak 1. Baltazarov skok u budućnost trebao je trajati točno 37 zemaljskih dana. Ako je otputovao u nedjelju, kojega se dana trebao vratiti?

To je bio zadatak koji su mali učenici škole koja ih je pripremala za čarobnjake dobili već prvoga dana. Malo su razmislili, napravili tablicu i riješili zadatak vrlo jednostavno:

nedjelja	0	7	14	21	28	35
ponedjeljak	1	8	15	22	29	36
utorak	2	9	16	23	30	37
srijeda	3	10	17	24	31	
četvrtak	4	11	18	25	32	
petak	5	12	19	26	33	
subota	6	13	20	27	34	

Dakle, zaključili su da će se Baltazar vratiti u utorak.

Kada se vratio sa svoga puta, Baltazar (koji nije bio zadovoljan onime što je vidio u budućnosti, ali o tome još nije želio pričati) zadao im je malo teži zadatak.

Zadatak 2. Kada je stigao u budućnost, na kalendaru je bio datum 13. veljače 2053. godine. Koji je to dan u tjednu bio?

Prije nego što su pristupili računanju, odlučio im je malo pomoći pa im je objasnio kako su mogli jednostavnije riješiti prvi zadatak.

U svojoj čuvenoj knjizi *Disquisitiones Arithmeticae* matematičar Karl Friedrich Gauss uveo je modularnu aritmetiku koju su mogli primijeniti u tome zadatku.

Za brojeve x i y kažemo da su kongruentni modulo 7 (i označavamo $x \equiv y \pmod 7$**) ako je razlika $x - y$ višekratnik broja 7.**

Tako je, primjerice, $40 \equiv 5 \pmod 7$ jer je $40 - 5 = 35 = 5 \cdot 7$. Isto tako je $37 \equiv 2 \pmod 7$, pa ako dane u tjednu označavamo kodnim brojem koji je jednak ostatku prilikom dijeljenja brojem 7, a utorku je pridružen broj 2, možemo lako zaključiti da je utorak bio dan Baltazarova povratka.

nedjelja	0
ponedjeljak	1
utorak	2
srijeda	3
četvrtak	4
petak	5
subota	6

Tablica 1.

Za riješiti 2. zadatak trebalo je mnogo više priče.

Svaki dan koristimo kalendar ne razmišljajući o tome kako je nastao, koliko ga je ljudi stvaralo tijekom stotina godina te koliko je truda i vremena trebalo da se počne koristiti na način na koji ga mi danas upotrebljavamo. Iza primjene današnjeg kalendara leže razmišljanja i životni rad mnogih astronoma, matematičara i drugih ljudi koji su bili dovoljno moćni da naredbom promijene dotadašnje računanje vremena u novo, kao što je to učinio papa Grgur XIII. davne 1582. godine. Zato se kalendar kojim se mi danas koristimo njemu u čast zove *gregorijanski kalendar* jer ga je on uveo slušajući čuvene matematičare toga doba. Do tada se upotrebljavao *julijanski kalendar* koji je nosio ime po Juliju Cezaru, a koristio se od rimskih vremena do 1582. godine.

Svaki datum $D(d, m, g)$ sastoji se od oznaka za dan d, mjesec m i godinu g.

Znamo da *normalna* godina ima 365 dana, a dan 24 sata. Međutim, Zemlja se okrene oko svoje osi za 23.9345 sati, mjereno u odnosu na „fiksne" zvijezde. Taj period koji je zapravo jednak vremenu koje prođe između dva pojavljivanja Sunca u njegovoj najvišoj točki iznad nas, zove se *dan*.

Godinom ćemo (u ovome tekstu) smatrati vremenski period između dva proljetna ekvinocija, a koji iznosi 365.2422 dana. Ako, dakle, pomnožimo $0.2422 \cdot 4 = 0.9688$, u četiri godine dobijemo gotovo cijeli dan razlike. Zato se svake četiri godine veljači dodaje 1 dan, pa februar (veljača) u tim godinama (koje se zovu **prijestupne**) ima 29 dana.

Međutim, 0.9688 nije cijeli broj, pa je taj problem papa Grgur XIII. riješio definirajući sljedeća pravila ne bi li dobio još točniji kalendar:

1. **Svaka je četvrta godina prijestupna.** (2004., 2008., 2012. bile su prijestupne godine.)
2. **Svaka stota godina nije prijestupna.** (1900., 2100. nisu prijestupne.)
3. **Svaka četiristota godina jest prijestupna.** (2000., 2400. su prijestupne.)

Pokušajmo sada odrediti formulu $D(d, m, g)$ za određivanje dana u tjednu u ovisnosti o varijablama d, m, g. Pri tomu d označuje broj dana u mjesecu, m označuje broj mjeseca u godini, s tim da je **prvi mjesec mart, a zadnji februar**, kao u tablici:

	mart	april	maj	jun	jul	august	septembar	oktobar	novembar	decembar	januar	februar
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ovdje se koristimo latiniziranim nazivima mjeseci u čast prethodnog rimskog (julijanskog) kalendara, a to ima i smisla jer je, primjerice, oktobar bio osmi mjesec, novembar deveti, decembar deseti. Nadalje, g označava godinu s tim da za **januar i februar uzimamo i uvrštavamo u formulu** $D(d, m, g)$, **do koje ćemo ubrzo doći, prijašnju (prethodnu**) godinu, a za ostale mjesece godinu koja je u datumu.

Svaka *normalna godina* ima 365 dana i kako je $365 = 7 \cdot 52 + 1 \equiv 1 \pmod 7$, to znači da svaka normalna godina dodaje jedan dan u konačnom rezultatu, dok za prijestupne godine vrijedi: $366 = 7 \cdot 52 + 2 \equiv 2 \pmod 7$. To znači da se kod prijestupnih godina dodaju dva dana u konačnom zbroju pa broj prijestupnih godina možemo odrediti kao najveće cijelo od $\frac{g}{4}$, što označavamo $\left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor$.

(Funkcija *najveće cijelo od a*, a koju pišemo kao $\lfloor a \rfloor$, najveći je cijeli broj koji je manji ili jednak a.)

Dakle, naša formula $D(d, m, g)$ u ovome koraku poprima oblik: $D(d,m,g) = d + g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor + x$, gdje se x još mora odrediti.

Od rezultata na desnoj strani moramo oduzeti stote godine koje nisu prijestupne $\left\lfloor \frac{g}{100} \right\rfloor$ i dodati svaku četiristotu godinu koja jest prijestupna $\left\lfloor \frac{g}{400} \right\rfloor$, pa $D(d, m, g)$ sada možemo zapisati kao:

$$D(d,m,g) = d + g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{400} \right\rfloor + k,$$

gdje je k neka nova nepoznanica koja ovisi o m i o početnom danu računanja gregorijanskoga kalendara. Kako odrediti ovisnost o m?

Proučimo tablicu:

m mjesec	1 mar	2 apr	3 maj	4 jun	5 jul	6 aug	7 sep	8 okt	9 nov	10 dec	11 jan	12 feb
broj dana u mjesecu	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	28 ili 29
broj dana iznad 28	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	3	0 ili 1
broj akumuliranih dana iz prethodnih mjeseci koje treba dodati $m_0(m)$	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29
$m_0(m) = a(\text{mod}7)$	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	5	1

Matematičar Karl Zeller uočio je da se u trećem redu ove tablice pojavljuju dva niza od pet članova: 3, 2, 3, 2, 3, pa opet 3, 2, 3, 2, 3, a kako je 3 + 2 + + 3 + 2 + 3 = 13, procijenio je da je prosječan broj dana koje po mjesecu treba dodati $\frac{13}{5}$.

Metodom isprobavanja, pokušaja i pogrešaka došao je do izraza koji opisuje $m_0(m)$, tj. četvrti red tablice:

$$m_0(m) = \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor - 2, (*)$$

$$m_0(1) = 2 - 2 = 0,\ \ m_0(11) = 26 \text{ itd.}$$

Vrijedi i formula: $m_0(m) = \left\lfloor \frac{31m}{12} \right\rfloor - 2$,

pri čemu m u oba izraza označava broj mjeseca u godini prema gornjoj tablici.

Formuli $D(d,m,g) = d + g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{400} \right\rfloor + k$ dodajemo član označen sa (*) pa dobivamo:

$D(d,m,g) = d + g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor - 2 + c$, gdje nepoznanicu c odredimo tako da u ovu formulu uvrstimo bilo koji poznati datum iz gregorijanskog kalendara. Primjerice, znamo da je 9. 1. 2016. godine bila subota.

Kodni broj subote je **6, *d* = 9, *m* = 11, *g* = 2015** (prema gornjim tablicama i dogovorenim konvencijama), stoga dobivamo:

$$6 = 9 + 2015 + \left\lfloor \frac{2015}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2015}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2015}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13 \cdot 11 - 1}{5} \right\rfloor - 2 + c$$

$$6 = 2540 - 2 + c$$

$$-2534 = c - 2$$

$$-362 \times 7 = c - 2, \text{ pa vrijedi da je}$$

$$c \equiv 2 \pmod 7$$

Tako formula za računanje dana u tjednu gregorijanskog kalendara poprima konačni oblik:

$$D(d, m, g) = d + g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m - 1}{5} \right\rfloor$$

Uvrštenjem brojeva iz zadanog datuma u ovaj izraz dobivamo neki broj D koji još treba podijeliti brojem 7 te naći ostatak prilikom dijeljenja. Taj ostatak određuje nam dan u tjednu koji očitamo u tablici 1.

Za julijanski kalendar formula je jednostavnija:

$$D(d, m, g) = d + g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m - 1}{5} \right\rfloor - 1$$

Riješimo dva zadatka koristeći ove formule:

a) Koji će dan u tjednu biti 21. 12. 2016. godine?

(Uputa: $d = 21$, $m = 10$, $g = 2016$, $D = 3$. Rješenje je srijeda.)

b) Nikola Zrinski poginuo je pod Sigetom 7. 9. 1566. godine. Koji je to dan u tjednu bio?

(Uputa: ovdje koristimo formulu za julijanski kalendar, $d = 7$, $m = 7$, $g = 1566$, $D = 6$. Rješenje je subota.)

I riješimo konačno zadatak 2. Koji će dan biti 13. februara 2053. godine? Ako stavimo dogovorene oznake $d = 13$, $m = 12$, $g = 2052$, $D = 4$, dobivamo da će 13. februara 2053. godine biti četvrtak.

(Malo drukčija analiza Zellerove formule računanja dana u tjednu iz zadanog datuma, kao i neki drugi algoritmi, mogu se naći u Poučku br. 21.)