DVIJE NEJEDNAKOSTI ZA TROKUT

Šefket Arslanagić, Sarajevo

U ovome članku dokazat ćemo dvije zanimljive nejednakosti za trokut. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ΔABC, h_a, h_b, h_c duljine njegovih visina, a m_a, m_b, m_c duljine njegovih težišnica. Dokazat ćemo sada da vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a+b+c} < 1 \tag{1}$$

i

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a+b+c} < 1 . \tag{2}$$

Dokaz: 1° Dokažimo nejednakost (1). Neka su h_a, h_b, h_c duljine visina trokuta ΔABC, a točka H njegov ortocentar (Slika 1.). Iz pravokutnih trokuta ΔAA_1C, ΔABB_1 i ΔBCC_1 slijedi (zašto?):

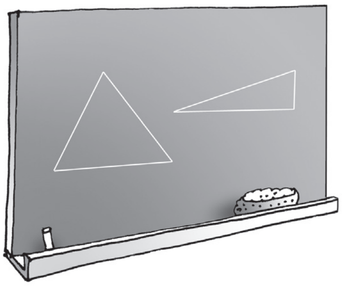
$$|AA_1| < |AC|,\ |BB_1| < |AB| \ \text{ i } \ |CC_1| < |BC|, \text{ tj.}$$

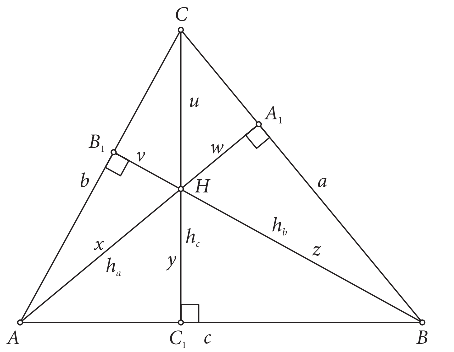
$$h_a < b,\ \ h_b < c \ \text{ i } \ h_c < a ,$$

a nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobivamo:

$$h_a + h_b + h_c < a + b + c , \text{ tj.}$$

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a+b+c} < 1 . \tag{3}$$

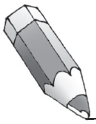




Slika 1.

Neka ortocentar H dijeli visine na sljedeće dijelove:

$$h_a = x + w,\ \ h_b = v + z,\ \ h_c = y + u ,$$



gdje je $|HA| = x$, $|HA_1| = w$, $|HB| = z$, $|HB_1| = v$, $|HC| = u$ i $|HC_1| = y$.

Sada, na temelju nejednakosti trokuta, zaključujemo:

$$b = |AC| = |AB_1| + |CB_1| < \left(|HA| + |HB_1|\right) + \left(|HB_1| + |HC|\right), \text{ tj.}$$

$$b < x + v + v + u,$$

te analogno

$$c < x + y + y + z,$$

$$a < z + w + w + u.$$

Nakon zbrajanja gornjih nejednakosti dobivamo:

$$a + b + c < 2\left[(x + w) + (z + v) + (y + u)\right], \text{ tj.}$$

$$a + b + c < 2\left(h_a + h_b + h_c\right),$$

a odavde

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} > \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

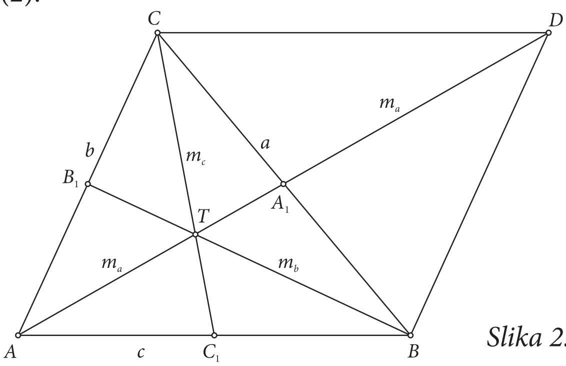
Sada iz nejednakosti (3) i (4) dobivamo nejednakost (1).

2° Prijeđimo sada na dokaz nejednakosti (2).

Neka su m_a, m_b, m_c duljine težišnica trokuta ΔABC, a točka T njegovo težište (Slika 2.).

Tada je $|BA_1| = |CA_1| = \dfrac{a}{2}$, $|AB_1| = |CB_1| = \dfrac{b}{2}$ i $|AC_1| = |BC_1| = \dfrac{c}{2}$,

te $|AT| = \dfrac{2}{3}m_a$, $|BT| = \dfrac{2}{3}m_b$ i $|CT| = \dfrac{2}{3}m_c$.



Slika 2.

Na osnovi nejednakosti trokuta sada iz trokuta ΔABT, ΔACT i ΔBCT dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c,$$

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b,$$

$$\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a,$$

te nakon zbrajanja ovih nejednakosti:

$$2\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c\right) > a + b + c \text{, tj.}$$

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c),$$

a odavde

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} > \frac{3}{4}. \qquad (5)$$

Produljimo sada težišnicu $\overline{AA_1}$ preko točke A_1 do točke D tako da je $|A_1D| = m_a$. Uočite da je četverokut $ABDC$ paralelogram (zašto?), što znači da je $|BD| = b, |CD| = c$. Primjenjujući sada nejednakost trokuta na trokut ΔABD, dobivamo da je

$$|AD| < |AB| + |BD|, \qquad \text{tj.}$$

$$2m_a < c + b$$

i analogno

$$2m_b < a + c,$$

$$2m_c < a + b.$$

Nakon zbrajanja gornjih nejednakosti dobivamo:

$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c) \text{, tj.}$$

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c,$$

a odavde

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1. \qquad (6)$$

Sada iz nejednakosti (5) i (6) dobivamo nejednakost (2).

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.
2. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
3. O. Bottema i ostali, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (Netherlands), 1969.