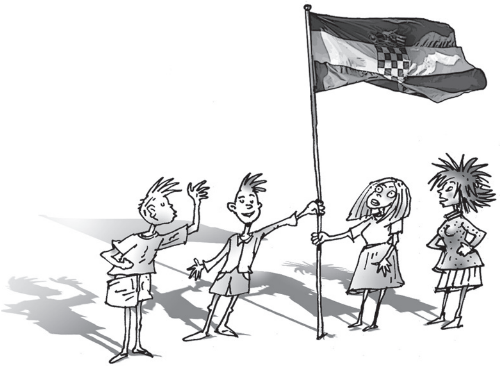
KUP MATEMATIČKE GIMNAZIJE U BEOGRADU 27. LIPNJA - 2. SRPNJA 2016.

Lucija Gojmerac, Luka Kraljević, Karlo Tikvicki
i Magda Topić, XV. gimnazija, Zagreb

Od 27. lipnja do 2. srpnja 2016. godine održan je 4. Kup matematičke gimnazije u Beogradu. To je natjecanje iz triju predmeta: matematike, fizike i informatike, a sudionici natjecanja bili su učenici rođeni 2000. godine (ili mlađi) iz 13 europskih zemalja: Bosne i Hercegovine, Bugarske, Crne Gore, Hrvatske, Italije, Makedonije, Njemačke, Rumunjske, Rusije, Slovenije, Srbije, Švedske i Velike Britanije. Hrvatski tim bio je iz XV. gimnazije u Zagrebu, a činili su ga učenici Lucija Gojmerac, Luka Kraljević, Karlo Tikvicki, Magda Topić i voditeljica tima, profesorica Bernardica Mlinarić. Luka Kraljević na natjecanju je osvojio srebrnu medalju iz matematike i brončane medalje iz fizike i informatike. Karlo Tikvicki osvojio je brončanu medalju iz matematike i fizike, a Lucija Gojmerac osvojila je srebrnu medalju iz matematike.



Natjecanje iz matematike

Natjecanje iz matematike sastojalo se od 12 zadataka podijeljenih u 2 dijela. Prvi dio sastojao se od 8 zadataka višestrukog izbora (na zaokruživanje) i svaki je nosio po 5 bodova, a drugi je dio bio sastavljen od 4 zadatka iz područja algebre, geometrije, teorije brojeva i kombinatorike, koji su donosili po 15 bodova.

Iskustvo

Svo vrijeme koje nismo proveli natječući se, utrošili smo na druženje s ostalim sudionicima i istraživanje Beograda i okolice. U organizaciji škole posjetili smo izložbu o Mihajlu Pupinu u Istorijskom muzeju Srbije, hram sv. Save, Prirodnjački centar Srbije Svilajnac i manastir u Manasiji. Volonteri iz Matematičke gimnazije odveli su nas u Muzej Nikole Tesle i Narodnu biblioteku Srbije, a s njima smo razgledali i Kalemegdan, Skadarliju, Trg Republike i druge znamenitosti Beograda. Razmijenili smo kontakte i sprijateljili se s brojnim sudionicima i volonterima na natjecanju i u izvrsnoj se atmosferi zabavljali tijekom cijelog boravka u gradu.

Zadatci

1. Skup svih rješenja nejednadžbe $|x+3|-|x+1|<2$ je:

   (A) skup svih realnih brojeva; (B) $(-3, -2)$;

   (C) $(-\infty, -1)$; (D) $(-1, +\infty)$; (E) $(-3, -1)$.

2. Posljednje dvije znamenke broja $7^{9^{9^{9}}}$ su:

   (A) 07; (B) 49; (C) 77; (D) 43; (E) 01.

3. Ako je $x - y = 7$ i $x^2 - y^2 = 77$, onda je umnožak $x \cdot y$ jednak:

   (A) 8; (B) 18 ; (C) −10; (D) −15; (E) 44.

4. Ako je $\frac{a+b}{b} = 3$, onda je $\frac{a^2+b^2}{ab}$ jednako:

   (A) 9; (B) $\frac{17}{4}$; (C) $\frac{10}{3}$; (D) 5; (E) $\frac{5}{2}$.

5. Jedna od osnovica jednakokračnog trapeza je duljine 12 cm, dok su ostale stranice trapeza jednake duljine, 6 cm svaka. Duljina dužine dijagonale tog trapeza jednaka je:

   (A) 6 cm; (B) $6\sqrt{2}$ cm; (C) $6\sqrt{3}$ cm; (D) 8 cm; (E) 10 cm.

6. Dvije tetive $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ na kružnici k su jednake. Ako tangenta kružnice k u točki A stvara kut od 50° s tangentom AB, onda je šiljasti kut između te tangente i tetive $\overline{BC}$ jednak:

   (A) 30°; (B) 40°; (C) 45°; (D) 50°; (E) 60°.

7. Neka su x i y neki realni brojevi. Najmanja moguća vrijednost izraza $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$ tada je:

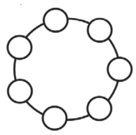
   (A) 6; (B) 4; (C) 0; (D) −4; (E) −6.

8. Stranica romba je duljine $a = 9$ cm, a zbroj duljina dijagonala tog romba je $d_1 + d_2 = 24$ cm. Površina tog romba tada je (u cm^2):

   (A) 81; (B) 72; (C) 108; (D) 64; (E) 63.

9. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi, takvi da $a + b + c = 1$. Dokažite sljedeću nejednakost:

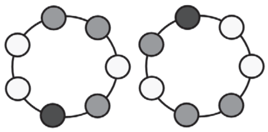
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$



Ogrlica prije bojenja.

10. Neka je ABC trokut u kojemu su $|\angle BAC| = 50°$, $|\angle ABC| = 60°$. Ako su D i E točke na stranicama, redom, $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, tako da je $|\angle DCA| = |\angle EAC| = 30°$, odredite veličinu kuta CDE.

11. Pronađite sve pozitivne cijele brojeve m i n takve da vrijedi $2^n = 3^m + 5$.



Dvije šarene ogrlice koje su iste.

12. Dana je ogrlica sa 7 perlica, kao na slici. Svaku od perlica obojimo jednom od tri boje (crvenom, plavom ili žutom). Možemo reći da je ogrlica šarena ako je svaka boja korištena bar jednom. Koliko različitih šarenih obojenja postoji ako se obojenja koja se mogu postići rotacijom ogrlice smatraju istima?

Rješenja:

1. (C) 2. (A) 3. (B) 4. (E) 5. (C) 6. (A) 7. (D) 8. (E)

9. Prvo koristimo nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine za brojeve $a_1 = a + \frac{1}{a}, b_1 = b + \frac{1}{b}, c_1 = c + \frac{1}{c}$ koji su svi pozitivni:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{3}} \geq \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 3 \cdot \left(\frac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \quad (*)$$

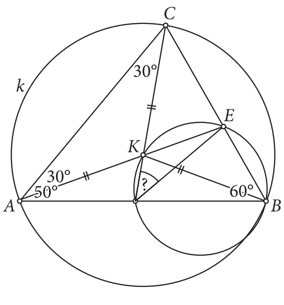
Koristeći nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine za a, b, c dobivamo

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9. \quad (**)$$

Sad iskoristimo $(**)$ u $(*)$ i dobivamo

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}(1 + 9)^2 = \frac{100}{3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su $a = b = c = \frac{1}{3}$.



10. Neka je točka K presjek dužina $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$. Trokut AKC je jednakokračan jer $|\angle KAC| = |\angle KCA| = 30°$. Slijedi da je $|KA| = |KC|$ i $|\angle AKC| = 120°$. Budući da je $|\angle AKC| = 2|\angle ABC|$ i $|KA| = |KC|$, zaključujemo da je K središte opisane kružnice k oko ΔABC.

Budući da je $|KA| = |KC| = |KB|$, zaključujemo da je $20° = |\angle KAB| = |\angle KBD|$ i, jer su vršni kutovi jednaki, $|\angle DKE| = |\angle AKC| = 120°$. Iz $|\angle DKE| + |\angle DBE| = 180°$ slijedi da je četverokut $DBEK$ tetivni. Budući da su svi obodni kutovi nad istom tetivom sukladni, zaključujemo da je $|\angle KDE| = |\angle KBE| = 40°$. Iz toga slijedi da je $|\angle CDE| = |\angle KDE| = 40°$.

11. Za $n = 3$ dobivamo da je $m = 1$, a za $n = 5$ je $m = 3$. Potrebno je dokazati da su to jedina moguća rješenja.

Lako je provjeriti da $n \in \{1, 2, 4\}$ ne mogu biti rješenja. Pretpostavimo onda da je $n > 5$. U tom slučaju 2^n je djeljivo brojem 64 i svi mogući ostatci r pri dijeljenju 3^k brojem 64 su:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r	3	9	27	17	51	25	11	33	35	41	59	49	19	57	43	1

S obzirom da je $64 \mid 3^m + 5$, zaključujemo da $m = 11+16l$, za r, $l \in$ N. Sad pokažimo da, u ovom slučaju, ostatak pri dijeljenju 2^n brojem 17 nije jednak onome pri dijeljenju $3^m + 5$ brojem 17.

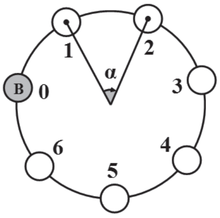
Znamo da je $3^m = (3^{16})^l \cdot 3^{11}$ i, s obzirom da je $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ (Mali Fermatov teorem) i $3^{11} \equiv 7 \pmod{17}$, zaključujemo da je $3^m + 5 \equiv 12 \pmod{17}$. S druge strane, mogući ostatci r pri dijeljenju 2^n brojem 17 su:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
r	2	4	8	16	15	13	9	1

Broj 12 se ne pojavljuje u tablici, što dokazuje da $n > 5$ ne može biti rješenje. Dakle, jedina moguća rješenja su $n = 3$, $m = 1$ i $n = 5$, $m = 3$.

12. Prvo numeriramo perlice brojevima od 0 do 6, kao na slici. Tada svaka od 7 perlica može biti obojena jednom od tri boje, što nam daje 3^7 konfiguracija. Pojavljuju se dva problema: (1) Koliko tih konfiguracija nije šareno? (2) Koliko smo ih prebrojili više puta, jer su iste ako poštujemo rotaciju (dopuštene rotacije su za kut veličine $k \cdot \dfrac{360°}{7} = k\alpha$, za $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)?

Prvo ćemo odgovoriti na pitanje broj (2).



Dvije su vrste ogrlica: ogrlica koja se ne mijenja rotacijom za kut $k\alpha$ i ogrlica koja se mijenja. Kako je obojena ogrlica koja se rotacijom ne mijenja? Obojimo perlicu numeriranu s 0 u boju B (B je jedna od Žute, Plave ili Crvene), i pretpostavimo da ćemo dobiti istu ogrlicu kada rotiramo za $k\alpha$, za neki $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tada i perlica k isto treba biti obojena u B, isto kao i perlice numerirane s $(2k)_{\text{mod}7}$, $(3k)_{\text{mod}7}$, $(4k)_{\text{mod}7}$, $(5k)_{\text{mod}7}$, i $(6k)_{\text{mod}7}$. S obzirom na to da je 7 prost broj, dobijemo da

$$\{0, k, (2k)_{\text{mod}7}, (3k)_{\text{mod}7}, (4k)_{\text{mod}7}, (5k)_{\text{mod}7}, (6k)_{\text{mod}7}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Zaključujemo da sve perlice trebaju biti obojene u boju B. To su 3 monokromatske ogrlice.

Broj ogrlica koje se rotacijom mijenjaju je $3^7 - 3$, gdje je svaka od različitih ogrlica brojena sedam puta. To znači da je broj *različitih* ogrlica s *najviše* 3 boje jednak

$$CP\check{Z} = \underbrace{\frac{1}{7}\left(3^7 - 3\right)}_{\text{7 različitih konfiguracija daje istu ogrlicu}} + \underbrace{3}_{\text{monokromatske ogralice}} = \frac{3}{7}\left(3^3 - 1\right)\left(3^3 + 1\right) + 3 = 315$$

Možemo koristiti istu metodu da zaključimo da je broj *različitih ogrlica* s *najviše* 2 zadane boje jednak $\dfrac{1}{7}\left(2^7 - 2\right) + 2 = 20$, a za jednu zadanu boju broj je 1. Koristeći metodu uključivanja i isključivanja, dobivamo da je broj *različitih šarenih* ogrlica jednak:

$$CP\check{Z} - CP - P\check{Z} - \check{Z}C + C + P + \check{Z} = 315 - 3 \cdot 20 + 3 = 258.$$

http://www.cup.mg.edu.rs/ (4. 8. 2016.)