BOJE NA ŠAHOVNICI

Siniša Režek, Zagreb

Matematika ne leži ukopana usred kontinenata egzaktnih znanosti; ona je na njegovim obalama, uz ocean umjetnosti.

Vladimir Devidé (1925. – 2010.)

Boje su jedan od najboljih i najjačih načina kojima mijenjamo prostor u kojem živimo. Uz pomoć boja možemo prostoru u kojem živimo dodati atmosferu kakvu želimo, ili pak možemo isti prostor učiniti vizualno većim, manjim, širim, višim, užim...

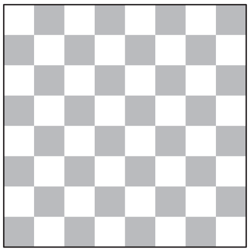
Tradicionalna podjela boja u umjetnosti je na osnovne i složene. Tri osnovne boje su crvena, žuta i plava. Osnovne su jer se ne mogu dobiti miješanjem drugih boja, a još se zovu i primarne boje. Tri složene boje dobivaju se miješanjem osnovnih boja: crvena + žuta = narančasta, plava + žuta = zelena i plava + crvena = ljubičasta. Te boje nazivaju se i sekundarne. Tercijarne boje dobivaju se miješanjem primarnih i sekundarnih (npr. plavozelena, žutozelena i dr.). Bijela, crna i siva boja ne nalaze se u spektru. Nazivamo ih još i nešarenim bojama.

Jednostavno i genijalno oruđe uz čiju pomoć možemo stvoriti određenu harmoniju spajajući dvije ili više boja u jednu cjelinu nazivamo krug boja. Prvi kružni dijagram razvio je Isaac Newton 1666. godine, a od tada mnogobrojni znanstvenici i umjetnici proučavaju i dizajniraju brojne varijacije toga koncepta. Na krugu boja može biti prikazano mnogo različitih boja, ali je najvažnije da su posložene u logičnome slijedu.

O boji polja u hrvatskom grbu lome se koplja. Tako kasna legenda, vjerojatno iz 19. stoljeća, govori o tome kako je hrvatski kralj Držislav (spominje se i ime kralja Suronje), zarobljen od Mlečana, igrao šahovski meč u kojemu mu je protivnik bio dužd Petar II. Orseolo. Dobio je sve tri partije i tako osvojio slobodu, a prema nekim verzijama i vlast nad dalmatinskim gradovima. Nakon toga je stavio šahovsku ploču u svoj grb. U nekim navodima spominje se da bijela boja označava Bijelu Hrvatsku, a crvena Crvenu Hrvatsku. Također postoji vjerovanje o značenju boje prvog polja u grbu, prema kojem bi prvo bijelo polje označavalo samostalnost Hrvatske, a prvo crveno polje njezin podređen položaj, no ni ovo tumačenje novijeg datuma nema svoje potvrde u starijoj predaji.

Matematika i šah nisu povezani samo poznatom legendom o žitu. Potrebno je razvijati logičko mišljenje i zaključivanje, predviđati protivnikove poteze, biti nekoliko koraka ispred njega. Između ostalog, razvijanje matematičkih vještina od iznimne je važnosti za svakog učenika i ujedno je zadaća naših udžbenika. Stoga pokušajmo povezati boje i šahovnicu preko matematičkih zadataka.

Zadatak 1. *Crno-bijelo*. Na koliko se načina mogu izabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovnici tako da se ne nalaze u istome retku ili istom stupcu?



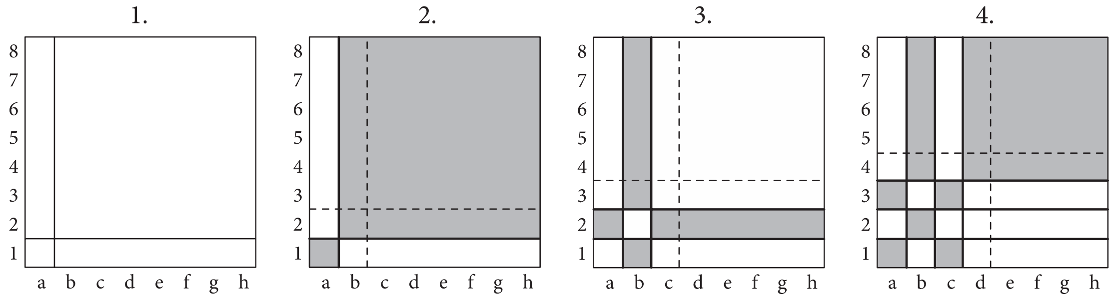
Rješenje: Jedno crno polje možemo izabrati na 32 načina. Njegovim izborom onemogućuje se izbor bijelih polja iz njegovog retka i njegova stupca. Takvih bijelih polja ima ukupno 8, pa bijelo polje možemo izabrati na 24 načina. Znači, ukupan broj mogućih izbora je $32 \cdot 24 = 768$ načina.

Zadatak 2. *Crno polje*. Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da polja koja imaju zajedničku stranicu budu različitih boja, kao standardna šahovnica. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakome od osam polja u tome retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

Rješenje: To nije moguće postići. U svakom ćemo potezu promijeniti boju na točno 8 polja. Ako je k od tih polja crno, onda je $8 - k$ od tih polja bijelo. Označimo s C ukupan broj crnih polja prije nekog poteza. Nakon tog poteza ukupan će broj crnih polja biti $C - k + (8 - k) = C + 8 - 2k$. Zaključujemo da će parnost ukupnog broja crnih polja uvijek biti ista. Budući da je na početku ukupan broj crnih polja jednak 32, što je paran broj, nemoguće je da nakon bilo kojeg broja poteza broj crnih polja bude 1.

Zadatak 3. *Kvadrat i kvadratići*. Kvadrat bijele boje podijeliti pravcima $a1$ i $b1$, koje su paralelne sa stanicama, na 4 dijela. Gornji desni i donji lijevi kvadrat obojiti crno, zatim dalje, konstruirati pravce $a2$ i $b2$ paralelno sa stranicama kvadrata, a sve u gornjem desnom i donjem lijevom kvadratu promijeniti boje u suprotne, itd. Koliki je najmanji broj takvih postupaka potrebno da se dobije šahovnica 8×8 polja?

Rješenje: Dovoljno je 7 koraka. Na primjer: prvi je korak postavljanje pravaca $a1$ i $b1$ tako da se sijeku u gornjem kutu polja $a1$. Zatim uzimamo pravce $a2$ i $b2$ tako da se sijeku u gornjem desnom kutu polja $b2$, itd. Posljednji, sedmi korak je postavljanje pravaca $a7$ i $b7$ tako da se sijeku u gornjem desnom kutu polja $g7$. Promotrimo, neizbježno je 7 koraka jer poslije svakog koraka dobivamo jednu uspravnu liniju između crnih i bijeli polja, a na šahovnici ima 7 takvih linija. Dakle za svaku liniju po jedan korak.



Zadatak 4. *Polja i boje*. Na raspolaganju imamo šest (6) različitih „osnovnih" boja. Ove boje možemo miješati uzimajući jednake količine „osnovnih" boja. Riječ „osnovnih" je pod navodnicima jer u umjetnosti nemamo toliko osnovnih boja. Na taj način dobivamo određeni broj novih boja. Može li se ovim bojama obojiti šahovnica od 8×8 polja tako da svako njezino polje bude različito obojeno?

Rješenje: To nije moguće postići. Da bismo mogli riješiti ovaj zadatak, trebamo upotrijebiti kombinacije k-tog razreda od n elemenata koje su načini na koji možemo izabrati k elemenata iz skupa od n elemenata bez obzira na redoslijed izbora. Tako ukupan broj kombinacija računamo prema $K_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$. Prema tome ukupan broj boja dobivenih miješanjem dviju, triju, itd. osnovnih boja jednak je broju kombinacija druge, treće, itd. vrste od 6 osnovnih boja. Moguće je načiniti ukupno:

$$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}+1=2\cdot\binom{6}{1}+2\cdot\binom{6}{2}+2\cdot\binom{6}{3}+1=12+30+20+1=63$$

boje, što znači da jedno polje šahovske ploče neće biti obojeno.

Literatura:

1. Abramović, M.: Boje i sve što o njima morate znati, http://free-ri.t-com.hr/Marijo-Abramovic/savjeti.html, Internet, 2015.
2. HMD, Županijsko natjecanje iz matematike, 1. razred, srednja škola, A varijanta, http://www.matematika.hr/natjecanja/domaca/2014/, Internet, 2014.
3. Veljan, D.: Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb 2001.
4. Wikipedia, https://hr.wikipedia.org/wiki/Grb_Republike_Hrvatske, Internet, 2015.