

ABRAKADABRA

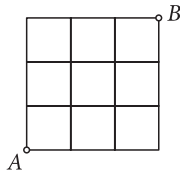
Jadranka Delač-Klepac, Zagreb



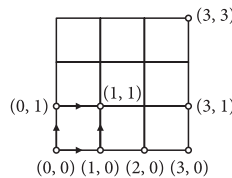
Čarobmatika je umjetnost – rekao je Baltazar.

U kojem je muzeju možemo vidjeti? – upitali su mali đaci čarobmatičke škole.

Ne postoji muzej u kojemu možete vidjeti ta umjetnička djela. Čarobmatičke slike slikane su idejama u našem umu. One kriju uzorke ideja koji nam govore kako misliti, zaključivati, dokazivati. Njih ne crtamo bojama, ne zapišujemo notama, ne pjevamo glasom... Ne vidimo ih okom, ne čujemo uhom, ali vidimo umom. Čarobmatika nije samo spretno i lako korištenje formula, uputa ili brojeva. Ona je i otkrivanje novih formula, pravila, uzoraka, ideja, postupaka, sličnosti, podudarnosti, načina razmišljanja i zaključivanja – odgovorio im je Baltazar te zadao sljedeći jednostavan zadatak.

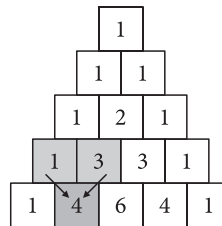


Zadatak 1. Zamislite rešetku ovakvog oblika načinjenu od žice (slika na rubu). Sada zamislite da po njoj mrav mora doći iz točke A u točku B. Na koliko najkraćih načina to može učiniti?



- 1
- 1 4
- 1 3 6
- 1 ② 3 ④
- 1 1 1 1 1

Ako zamislimo da smo žičanu rešetku stavili u koordinatni sustav u kojem je ishodište u točki A (kao na gornjoj skici), a točke presjeka označili uređenim parovima brojeva, jasno je da do točke (1, 1) možemo doći na 2 načina, do točke (3, 1) na 4 načina i sl. Zapišimo te brojeve u obliku tablice (na rubu), a zatim i u obliku trokuta tako da nam jedinica bude gornji vrh. Dobivamo:

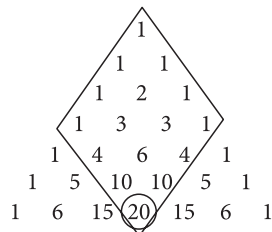


Tablica 1.

Iz ove sheme brojeva možemo uočiti da je broj u nekom redu jednak zbroju brojeva koji se nalaze neposredno iznad njega. Tako je $3 + 3 = 6$, $1 + 3 = 4$, itd.



Koristeći ovo svojstvo proširimo ovu tablicu za još dva reda:



Uočavamo da je $4 + 6 = 10$, $10 + 10 = 20$.

Dakle, mrav može na 20 načina doći iz točke A u točku B.

Ova shema brojeva zove se Pascalov trokut, nazvan je po matematičaru Blaisu Pascalu koji je živio u 17. stoljeću, iako su ovi brojevi bili poznati već i u staroj Kini (od 10. do 13. st.).

Možete li se ovaj način razmišljanja primijeniti na sljedeći zadatak?

Zadatak 2. Na koliko načina možete pročitati riječ ABRAKADABRA u sljedećem zapisu?

					A				
				B		B			
			R		R		R		
		A		A		A		A	
	K		K		K		K		K
A		A		A		A		A	
	D		D		D		D		D
		A		A		A		A	
			B		B		B		
				R		R			
					A				



Odgovor opet leži u Pascalovu trokutu:

								1																						
								1		1																				
								1		2		1																		
								1		3		3		1																
								1		4		6		4		1														
								1		5		10		10		5		1												
								1		6		15		20		15		6		1										
								1		7		21		35		35		21		7		1								
								1		8		28		56		70		56		28		8		1						
								1		9		36		84		126		126		84		36		9		1				
								1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1		
								1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1

Riječ ABRAKADABRA može se pročitati na 252 načina.



Ovakav način razmišljanja, u kojem smo uočili da sličnim zaključivanjem kao i u nekom prethodnom zadatku (problem) možemo doći do rezultata, zove se **analogija**. Analogija (grč. *analogia* – sklad, razmjer, pravilnost, podudarnost, srodnost), odnosno zaključivanje prema analogiji, misaoni je postupak pri kojemu se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava ili odnosa izvodi zaključak da se oni podudaraju i u drugim svojstvima ili odnosima.

Međutim, tu treba biti oprezan jer se koji put, ako analogija nije potpuna, može i pogriješiti.

Analogiju možemo uočiti u objektima, svojstvima, postupcima. U gornjim zadacima uočili smo analogiju u postupcima i objektima. Najdublji oblik analogije, tzv. potpuna analogija, zove se **izomorfizam** koji dovodi do potpunih i pouzdanih zaključaka. Analogija je prisutna u svakodnevnom govoru i razmišljanju, a koristi se i u mnogim znanostima.

Do brojeva iz Pascalovog troukuta može se doći na još mnogo načina i svi se uče u čarobmatičnoj školi. Pogledajmo sljedeća dva.

Zadatak 3. Zapišite u obliku tablice koeficijente koje dobijete u razvoju binoma $(a + b)^n$ tako da za eksponent n uvrstite redom brojeve 0, 1, 2, 3, 4. (Ako ste pažljivo radili, dobili ste tablicu 1.)

Zadatak 4. Ako tri puta bacate novčić, primjerice od 1 kune, koje ćete sve ishode (pticu kosa ili brojku 1; tj. glavu ili pismo) dobiti?

Rješenje:



broj bacanja	mogući ishodi	brojevi u Pascalovom trokutu
1	P, G	1 1
2	PP, (PG, GP), GG	1 2 1
3	PPP, (PGP, GPP, PPG), (GGP, GPG, PGG), GGG	1 3 3 1
4	Pokušajte sami naći skup ishoda za 4 bacanja novčića,	kao i pripadni red brojeva u Pascalovom trokutu.

U čarobmatičkoj školi u višim razredima uči se i kako pronaći analogiju između zadataka 3. i 4., a i kako povezati brojeve iz Pascalovog troukuta s dijelovima matematike koji se zovu – kombinatorika, teorija vjerojatnosti, fraktalna geometrija (trokut Sierpinskoga) i sl.

Ako vas je Pascalov troukut svojom simetrijom ili još nekim svojstvima začarao, više možete saznati u Matki br. 95, ožujak 2016.

Matematičar je čovjek koji umije naći analogije među tvrdnjama, bolji matematičar je onaj koji pronalazi analogije među dokazima, najbolji matematičar je onaj koji uočava analogije teorija, no može se zamisliti i onoga koji uočava analogije među analogijama.

(Banach)

