UČIMO REZUCKAJUĆI PRAVOKUTNIKE

Željko Brčić, Vinkovci

Jednoga dana Ante je zatekao svoga mlađeg brata Lovru kako škarama izrezuje na papiru nacrtane pravokutnike. Lovro mu je objasnio da upravo rješava zadatak iz domaće zadaće:

Zadatak 1. Nacrtaj na papir pravokutnik duljine 15 cm i širine 10 cm te mu izračunaj opseg i površinu. Sa svake strane pravokutnika škarama odreži „traku" širine 1 cm, napiši dimenzije novog pravokutnika te i njemu izračunaj opseg i površinu. Nastavi postupak rezanja i računanja dokle god je to moguće.

Lovro je brzo dovršio svoj rad, a rezultate je pregledno prikazao u tablici:

	duljina	širina	opseg	površina
1. pravokutnik	15 cm	10 cm	50 cm	150 cm^2
2. pravokutnik	13 cm	8 cm	42 cm	104 cm^2
3. pravokutnik	11 cm	6 cm	34 cm	66 cm^2
4. pravokutnik	9 cm	4 cm	26 cm	36 cm^2
5. pravokutnik	7 cm	2 cm	18 cm	14 cm^2

„Vidim da je sve puno isjeckanih papirića." – dobacio mu je Ante – „Ako nisi znao, ovaj si zadatak riješio metodom konkretizacije, osnovnom i najjednostavnijom metodom istraživanja u nastavi osnovnoškolske matematike. No, mislim da je vrijeme poraditi i na razvoju tvog apstraktnog mišljenja."

„A kako ćemo to učiniti?" – upita ga Lovro.

„Jednostavno! Glavom, a ne škarama." – glasio je odgovor – „Možeš li, nakon što si u svom zadatku četiri puta obrezivao pravokutnike, iz toga izvući nekakav koristan zaključak?"

„Pa, vidim da se nakon svakog rezanja duljine stranica pravokutnika smanjuju za 2 cm."

„Bravo, sada si iz niza konkretnih primjera došao do jednog, ne odveć teškog, ali ipak apstraktnog zaključka. Probaj sada riješiti ovakav zadatak:"

Zadatak 2. Zadan je pravokutnik dimenzija 30 cm × 20 cm koji se postupno smanjuje tako da mu se sa sve četiri strane režu trake širine 1 cm. Koliko se puta može obaviti postupak rezanja? Izračunaj opseg i površinu najmanjeg mogućeg pravokutnika.

„Broj rezanja očito ovisi o duljini kraće stranice. Njena je duljina 20 cm, pa ćemo pravokutnik moći rezati 9 puta, sve dok se ta duljina ne smanji na 2 cm. Analogno, duljina veće stranice također će se smanjiti za 18 cm, pa će postati 12 cm. Onda je opseg tog pravokutnika 28 cm, a površina 24 cm^2.

„Odlično!" – pohvalio je Ante mlađega brata – „A što kažeš da napravimo poopćenje ovakvog zadatka, odnosno ono što se u matematici zove generalizacija?"

„Slažem se, pod uvjetom da mi objasniš što je to." – odgovorio je Lovro.

„Generalizacija je složeni misaoni proces koji sadrži prijelaz s konkretnog i pojedinačnog primjera k općem slučaju. Ti si, primjerice, riješio dva zadatka u kojima se pojavljuje pravokutnik s poznatim duljinama stranica. No, kako bi riješio ovo...?"

Zadatak 3. Duljine stranica pravokutnika su prirodni brojevi a i b (izraženi u centimetrima). Početni pravokutnik smanjujemo na način opisan u prethodna dva zadatka. Koliko ćemo puta moći provesti smanjivanje pravokutnika i koliko iznose opseg i površina maksimalno smanjenog pravokutnika?

„Uh, čini se da ovo nadilazi moje sposobnosti. Mislim da će mi trebati bratska pomoć."

„Nema problema!" – uzvrati Ante – „Riješit ćemo to zajedno."

„Ako su a i b duljine stranica početnog pravokutnika, onda je njegov opseg $o = 2a + 2b$. Nakon prvog obrezivanja obje će se duljine smanjiti za 2 cm, odnosno postat će $a - 2$ i $b - 2$. Tada će opseg postati $o_1 = 2(a - 2) + 2(b - 2) = 2a + 2b - 8 = o - 8$. U drugom će se koraku duljine stranica opet smanjiti za 2 cm, pa će biti $a - 4$ i $b - 4$. Onda je $o_2 = 2(a - 4) + 2(b - 4) = 2a + 2b - 16 = (2a + 2b - 8) - 8 = o_1 - 8$. Sada možeš i sam, metodom analogije, zaključiti da će o_3 biti..."

„$o_3 = o_2 - 8$" – ispravno je zaključio Lovro – „a to će vrijediti i dalje. Općenito: $o_n = o_{n-1} - 8$."

„Jako lijepo zaključivanje. Usput, upravo si izveo svoju prvu rekurzivnu formulu u kojoj se rezultat ne dobiva iz početnih podataka, nego iz prethodnog rezultata. Usput, da je rekurzija točna možeš se uvjeriti iz tablice u Zadatku 1. Primijeti da se vrijednost opsega u svakom koraku zaista smanjuje za 8 cm."

„A zašto se i površina ne smanjuje uvijek za istu vrijednost?" – zanimalo je Lovru.

„I to se lako pokaže. Ako je površina početnog pravokutnika $p = ab$, onda je $p_1 = (a - 2)(b - 2) = ab - 2a - 2b + 4 = p - 2a - 2b + 4$. Dobili smo, dakle, da smanjenje nije linearno, za neki konstantni iznos, nego ovisi o veličinama a i b. Kako se svakim obrezivanjem pravokutnika duljine njegovih stranica smanjuju, ujedno se smanjuje i razlika susjednih površina, što je također vidljivo iz tvoje tablice."

„A kako ćemo izraziti koliko puta možemo smanjivati pravokutnike kada ne znamo koliki su a i b?" – bio je i dalje znatiželjan Lovro.

„Već si ranije zaključio da to ovisi o duljini kraće stranice; neka to, primjerice, bude stranica b. Dakle, na početku je bila b, u svakom smo je koraku smanjivali za 2 cm, te je na kraju postala također 2 cm. Ako broj koraka označimo s k, vrijedi $b - 2k = 2$, iz čega se izrazi $k = (b - 2) : 2$."

«Zaista, u Zadatku 1. stranica b bila je 10 cm, pa smo imali četiri rezanja, a u Zadatku 2. b je bio 20 cm, što daje $k = 9$, odnosno devet rezanja pravokutnika"

«U matematici je još jedna stvar vrlo bitna. Potrebno je, naime, predvidjeti sve moguće slučajeve koji se mogu pojaviti. U oba tvoja zadatka duljina stranice b je paran broj, pa je njena minimalna vrijednost nakon rezanja $b = 2$ cm. No, da je ta duljina bila neparni broj, tada bismo (opet uzastopnim smanjivanjem po 2 cm) na kraju dobili $b = 1$ cm. Tada bismo broj koraka k dobili iz $b - 2k = 1$, odnosno bilo bi $k = (b - 1) : 2$."

«Preostaje nam još izračunati opseg i površinu posljednjeg, najmanjeg mogućeg pravokutnika."

«Tako je, no i tu ćemo morati razlikovati navedene slučajeve. Ako je b paran broj, onda će ta manja stranica na kraju biti duga 2 cm. Primjećujemo da se ona (u k koraka) smanjila za $b - 2$, a za istu duljinu smanjit će se i druga stranica pravokutnika. Dulja stranica pravokutnika (nakon k koraka) postat će $a - (b - 2) = a - b + 2$. Sada se može izračunati $o_k = 2(a - b + 2) + 2 \cdot 2 = 2a - 2b + 8$, odnosno $P_k = (a - b + 2) \cdot 2 = 2a - 2b + 4$."

«Drugi ću slučaj pokušati riješiti sam." – ubaci se Lovro – «Dakle, ako je duljina kraće stranice b neparan broj, ona će nakon svih skraćivanja biti duga 1 cm. Smanjenje iznosi $b - 1$, pa će konačna duljina veće stranice pravokutnika biti $a - (b - 1) = a - b + 1$. Iz toga se izračuna $o_k = 2a - 2b + 4$, odnosno $p_k = a - b + 1$."

«Još samo nešto!" – nastavio je Ante – «Ranije sam ti spomenuo generalizaciju, a njoj suprotan pojam zove se specijalizacija. Kada već imaš neko dokazano svojstvo ili poučak, možeš ga iskoristiti na nekom posebnom, najčešće jednostavnijem slučaju. Primjerice, što kažeš na ovakav zadatak..."

Zadatak 4. Kvadrat s cjelobrojnom duljinom stranice u centimetrima smanjujemo tako da ga sa sve četiri strane uzastopno «skraćujemo" za 1 cm. Kakav kvadrat možemo dobiti na kraju toga postupka?

«Aha, shvatio sam specijalizaciju. Kvadrat je poseban slučaj pravokutnika i za njega vrijedi sve ono što smo zaključili u prošlom zadatku za pravokutnik. Dakle, ako je duljina stranice kvadrata paran broj, krajnji kvadrat imat će stranicu dugu 2 cm, a ako je neparan, stranica će biti 1 cm. Njihove opsege i površine možemo izračunati izravno iz standardnih formula za opseg i površinu kvadrata, ali i koristeći formule iz Zadatka 3. Kod kvadrata su duljine stranica jednake, pa ako u formule za o_k i p_k iz Zadatka 3. uvrstimo $b = a$, za parni broj a ćemo dobiti $o_k = 8$ cm i $p_k = 4$ cm^2, a za neparni broj a $o_k = 4$ cm i $p_k = 1$ cm^2."