Matka 25 (2016./2017.) br. 98

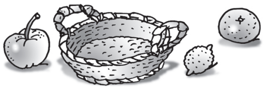
UVOD U REKURZIJE

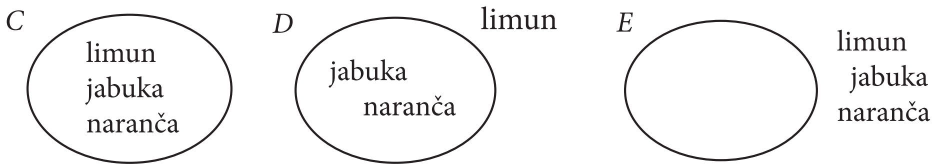
Ana Crnković, XV. gimnazija, Zagreb

Da bi nam bilo jasno što su to točno rekurzije, uvest ćemo nekoliko pojmova preko primjera. Pojmovi koje ću objasniti prije objašnjavanja rekurzije su skup, kartezijev umnožak, pravilo pridruživanja, funkcija i niz.

Recimo da imamo jabuku, limun i naranču. Neko od voća trebamo staviti u praznu košaru. Voće koje smo stavili u košaru zaokružit ćemo crtom u jednu cjelinu (pogledajte sliku). *Skupom* možemo nazvati bilo koju takvu „zaokruženu cjelinu". Za svaku pojedinu voćku unutar košare kažemo da je *element* skupa.

Neki od načina na koje možemo rasporediti voće su:





U skupu C nalazi se limun, jabuka i naranča.	U skupu D nalaze se jabuka i limun.	U skupu E ne nalazi se ništa.
Pišemo C = {limun, jabuka, naranča}	Pišemo D = {naranča, jabuka}	Pišemo $E = \{\ \}$
Limun $\in C$ Jabuka $\in C$ Naranča $\in C$	Limun $\notin D$ Jabuka $\in D$ Naranča $\in D$	Limun $\notin E$ Jabuka $\notin E$ Naranča $\notin E$

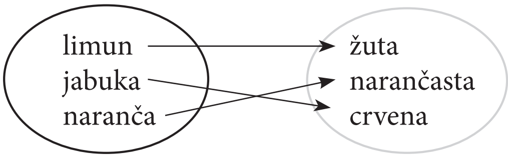
Ako je jabuka unutar cjeline (skupa C), kažemo da je jabuka element iz C i pišemo jabuka $\in C$. U suprotnom pišemo jabuka $\notin C$.

Skupovi mogu biti u različitim odnosima. Ako zamislimo dva skupa – A i B – kao krugove, oni se mogu sjeći, ne sjeći ili biti jedan u drugome. Ako je krug A unutar kruga B, onda kažemo da je A *podskup* od B. Pišemo $A \subseteq B$.

Skupovi su nam bitni jer ih koristimo pri uparivanju. Npr. uparujemo pravi ključ s bravom da bismo otvorili vrata, povezujemo lice osobe s njezinim imenom da joj se možemo obratiti, voće opisujemo bojom itd. Zapravo uparujemo elemente jednog skupa s elementima drugog skupa. Takva uparivanja pomažu nam u snalaženju u svakodnevnom životu.

Pogledajmo primjer s voćem: limun je žut, jabuka je crvena, naranča je narančasta. Svakoj voćki pridružili smo neku boju. Možemo reći da smo napravili parove: (limun, žuta), (jabuka, crvena), (naranča, narančasta).

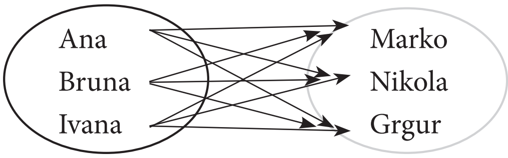
Recimo da je C = {limun, naranča, jabuka} i B = {žuta, narančasta, crvena}



Time možemo reći da smo uparivali elemente iz C (sve unutar prvog kruga) s elementima iz B (sve unutar drugog kruga). Usporedite sliku i napravljene parove. Parovi su oblika (početak strelice, kraj strelice). Ako je u paru bitan redoslijed, onda taj par nazivamo *uređenim*.

Postoje neka uparivanja koja su jako poznata ili se često koriste.

Recimo da imamo skup djevojaka i mladića. Uparujemo djevojku i mladića ako je djevojka prijateljica mladiću. Skup svih djevojaka je C = {Ana, Bruna, Ivana} i skup svih mladića je D = {Marko, Nikola, Grgur}. Ako je svaka djevojka prijateljica svakome od mladića, situacija je sljedeća:



Ljude koji su u paru povezali smo smo strelicom.

Rezultat uparivanja je skup r = {(Ana, Marko), (Ana, Nikola), (Ana, Grgur), (Bruna, Marko), (Bruna, Nikola), (Bruna, Grgur), (Ivana, Marko), (Ivana, Nikola), (Ivana, Grgur)}

Skup r je zapravo skup svih strelica koje počinju u skupu C i završavaju u skupu D. Taj je skup skup svih uređenih parova oblika (cura, dečko).

Rezultat ovakvog uparivanja „svakoga sa svakim” (svakog elementa iz prvog skupa sa svakim elementom iz drugog skupa) nazivamo *kartezijevim produktom* (od ta dva skupa).

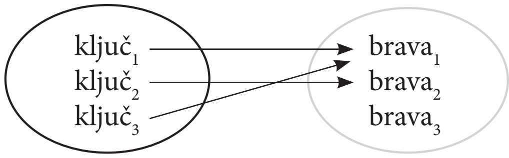
Skup r je kartezijev produkt skupa djevojaka i skupa mladića. To zapisujemo kao $r = C \times D$.

Naravno, nisu uvijek svi upoznati sa svima. Npr. moguće je da Ana nije upoznala Nikolu ili da Bruna nije upoznala Grgura. Tada Ana nije prijateljica Nikoli, niti Bruna Grguru. Time bismo imali manje parova. U skupu *r* ne bi se nalazio par (Ana, Nikola) i par (Bruna, Grgur). Svi ostali parovi nalaze se i u $C \times D$ (možemo ih naći na slici). Takav je manji skup podskup od $C \times D$.

Svaki skup uređenih parova oblika (element iz *A*, element iz *B*) podskup je od $A \times B$.

Uzmimo primjer s ključevima i bravama. Imamo nekoliko ključeva i međusobno različitih brava.

Recimo da je skup ključeva K = {ključ$_1$, ključ$_2$, ključ$_3$}. Također, neka je skup B = {brava$_1$, brava$_2$, brava$_3$}.



Svaki ključ uparujemo s onom bravom koju može otključati. Skup L = {(ključ1, brava1), (ključ2, brava2), (ključ3, brava1)}. Skup $L \subseteq K \times B$. Vrijedi da svaki ključ otključava točno jednu bravu.

Time je skup L = {(ključ$_1$, brava$_1$), (ključ$_2$, brava$_2$), (ključ$_1$,brava$_1$)}.

Rezultat ovakvog uparivanja gdje „svatko ima točno jednog svog" naziva se *pravilom pridruživanja*.

Skup *L* je pravilo pridruživanja.

Ako je $r \subseteq A \times B$ pravilo pridruživanja, tada uređen par (r, B) nazivamo *funkcijom*, a skup *B* njezinom *kodomenom*. Budući da je *r* skup strelica, kodomena joj je skup završetaka strelica, a *domena* skup početaka svih strelica.

Moguće je da nije svaki element iz *A* povezan strelicom s nekim elementom iz *B*. Tada je domena manja od skupa *A*.

Recimo da je naš skup brava – skup brava na vratima našega stana. Jednom se dogodi da imamo neke ključeve koji ne otvaraju ni jednu bravu koju imamo na vratima. Slučajno smo uzeli ključeve od prijatelja. Tada ne možemo upariti prijateljeve ključeve s našim bravama jer ih njegovi ključevi jednostavno ne otključavaju. Tako neće svi ključevi koje imamo biti upareni s nekom našom bravom.

Tada je domena skup svih ključeva koje imamo bez prijateljeva ključa.

Neka je funkcija f uređen par (r, B). Domena funkcije f je skup D. Tada pišemo $f : D \to B$. Za svaki uređen par (d, b) iz r, gdje je $d \in D$ i $b \in B$, pišemo $f(d) = b$. Dodatno, funkciju čija su domena skup prirodnih brojeva, tj. $f : N \to$ *kodomena*, nazivamo *nizom*.

Nizove koristimo kada možemo nešto poredati na način da možemo reći „ovaj je prvi, ovaj je drugi, ovaj je treći" i tako dalje. Tada te stvari možemo poredati u niz. Npr. ako imamo utrku gdje je Marko prvi, Luka drugi, Krešo treći... i tako dalje do 98. Mikice i do 99. Kristijana, tada možemo uvesti niz f za koji vrijedi: $f(1)$ = Marko; $f(2)$ = Luka; $f(3)$ = Krešo... itd.

Onda kažemo da je Marko *prvi* član *niza*, Luka *drugi član niza*, Krešo *treći član niza* i Kristijan 99. *član niza*. Za prirodni broj n kažemo da $f(n)$ je *n-ti član niza*.

Prvi niz koji smo učili u školi je niz prirodnih brojeva. Inače, kada smo se u školi prvi put susreli s prirodnim brojevima, učili smo ih nekim redom. Bilo je to tako da je svaki sljedeći broj koji smo učili bio veći od prethodnog za jedan. Prvo smo učili što je jedan, pa što je dva koji je veći od jedan za jedan, pa što je tri koji je veći od dva za jedan... Time smo naučili da prirodne brojeve možemo poredati u niz takav da je prvi član niza jednak jedan i da je svaki sljedeći član veći od prethodnog za jedan.

Time smo zapravo naučili da je

$$f(1) = 1$$

$$f(n) = f(n-1) + 1$$

Možemo reći da niz ima neku početnu vrijednost i neko pravilo kojim se ostali članovi niza računaju pomoću prethodnih. To pravilo naziva se *rekurzija*. Jedan poznati primjer su Fibbonacijevi brojevi:

$$f(1) = 1; f(2) = 1$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

Ovaj niz, za razliku od prošloga, ima dvije početne vrijednosti. Također, ova rekurzija koristi dva prethodna člana niza, za razliku od prošle koja koristi samo jedan.

Rekurzija je pravilo pomoću kojega se računa n-ti član nekog niza pomoću nekih (moguće i svih) prethodnih elemenata toga istog niza, počevši od nekih početnih članova niza kojima znamo vrijednost.