Matka 25 (2016./2017.) br. 98

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

RAČUNANJE KORIJENA

Prije džepnog računala i raznih softvera računanje kvadratnog i kubnog korijena bio je zahtjevan posao. Matematičari su se domišljali raznim računskim postupcima kojima su bolje ili lošije aproksimirali vrijednosti konkretnih izračuna.

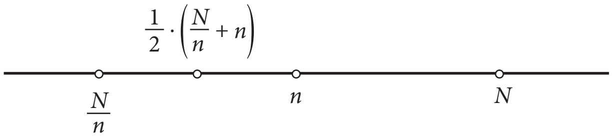
Sve veći zahtjevi za bržim računanjem doveli su u prvi plan tablice u kojima su se nalazili gotovi izračuni, kao i postupke kako uz pomoć tabličnih vrijednosti izračunati bolje aproksimacije. U ovom ćemo tekstu opisati neke od tih algoritama kako bismo dobili uvid u domišljatost matemagičara.

Kvadratni korijen

Sljedeća jednostavna metoda računanja kvadratnog korijena realnog broja vraća nas u vrijeme starog Babilona. Ova je metoda pogrješno poznata i kao Heronov postupak.

Ako je $\sqrt{N} \approx n$ prva „gruba” vrijednost kvadratnog korijena broja N, onda je bolja aproksimacija sljedeća aritmetička sredina:

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right).$$



Nastavimo primijenjivati ovu ideju s računanjem aritmetičke sredine. Primijenimo je tako da je novi n prethodno izračunata aritmetička sredina $\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)$. Dobivamo

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)\right).$$

Ovaj postupak u sljedećem koraku daje

$$\sqrt{N}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{n}+n\right)\right)\right).$$

Kako izgleda sljedeća aproksimacija? (To ostavljamo čitatelju za vježbu!)

Primijenimo ovaj postupak na konkretnome primjeru.

Izračunajmo $\sqrt{1000}$. Prvih pet aproksimacija su:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1000} &\approx && 30\\
&\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{30}+30\right) &&\approx 31.66666666\ldots\\
&\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{31.66666666}+31.66666666\right) &&\approx 31.62280701\ldots\\
&\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{31.62280701}+31.62280701\right) &&\approx 31.62277660\ldots\\
&\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{31.62277660}+31.62277660\right) &&\approx 31.62277660\ldots
\end{aligned}$$

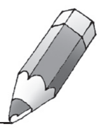
U ovom trenutku zastanimo i uočimo da aproksimacija ima 8 točnih decimalnih mjesta.

Dakle, sukladno zahtjevu na koliko točnih decimalnih mjesta trebamo izračunati kvadratni korijen nekog broja, ovaj se postupak primijenjuje dok to ne postignemo.

Kubni korijen

Za sljedeću se metodu također tvrdi da je Heronova, no povjesničari matematike smatraju da je i njezin izvor puno stariji. Vjerojatno potječe iz vremena starog Babilona.

Izvedimo formulu kojom se može aproksimirati kubni korijen nekog realnog broja.



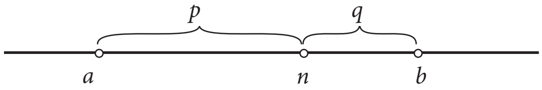
Neka je $\sqrt[3]{N} \approx n.$

Omeđimo broj n između dva uzastopna prirodna broja, tj. neka vrijedi

$$a < n < b,\ a + 1 = b.$$

Odavde je

$$n - a = p,$$
$$b - n = q,$$
$$p + q = 1.$$



Uz ove uvjete za a^3 i b^3 vrijedi

$$a^3 = (n - p)^3 = n^3 - 3n^2 p + 3np - p^3$$
$$b^3 = (n + q)^3 = n^3 + 3n^2 q + 3nq + q^3.$$

Zato što je $p < 1$, zaključujemo da je p^3 puno manji od 1. To isto vrijedi i za q^3 jer je $q < 1$.

„Zanemarivanjem" tih malih vrijednosti brojeva p^3 i q^3 dobivamo da je

$$P = N - a^3 \approx 3np(n - p) = 3anp,$$
$$Q = b^3 - N \approx 3nq(n + p) = 3bnq.$$

Odavde je

$$\frac{p}{q} \approx \frac{b \cdot P}{a \cdot Q},$$

$$\frac{p}{p+q} = p \approx \frac{b \cdot P}{b \cdot P + a \cdot Q}.$$

Kako je $n = a + p$, odavde slijedi formula za aproksimiranje vrijednosti kubnog korijena nekog realnog broja

$$n = a + p \approx a + \frac{b \cdot P}{b \cdot P + a \cdot Q}.$$

Ilustrirajmo ovu metodu računanjem $\sqrt[3]{90}$.

Odredimo brojeve N, a, a^3, b, b^3, P i Q:

$N = 90$, $a = 4$, $a^3 = 64$, $b = 5$, $b^3 = 125$, $P = 90 - 64 = 26$, $Q = 125 - 90 = 35$.

Dakle, račun pokazuje da je

$$\sqrt[3]{90} \approx 4 + \frac{5 \cdot 26}{5 \cdot 26 + 4 \cdot 35} = 4 + \frac{130}{270} = 4.481481\ldots$$

Izračun vrijednosti $\sqrt[3]{90}$ na džepnom računalu daje zapis 4.481404747…, pa je očito da su ovom metodom tri decimalna mjesta točna.

Za vježbu izračunajte $\sqrt[3]{400}$ i usporedite s vrijednošću koje daje džepno računalo. Koliko je decimala zajedničko džepnom računalu i Heronovoj aproksimaciji $\sqrt[3]{400}$?

Aproksimiranje je imalo velik broj različitih metoda u povijesti matematike. Neke su aproksimacije bile „brže", neke preciznije (omogućavale su veći broj točnih decimala, tj. pogrješka aproksimacije bila je manja), a neke domišljatije.

Za ilustraciju navedimo nekoliko „gotovih" i sličnih formula u kojima se broj N prikazuje kao zbroj dvaju brojeva.

Hinduski matematičari rabili su početkom 5. stoljeća izraz/formulu

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}.$$

Niccolo Fontana Tartaglia (1499. – 1557.) rabi aproksimaciju

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 3a},$$

dok **Leonardo Fibonacci** (1170. – 1250.) računa s

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1},$$

a **Isaac Newton** (1643. – 1727.) računa s

$$\sqrt[3]{a^3\left(1 + \frac{b}{a^3}\right)} = a\left(1 + \frac{b}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} = a\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a^3} + \cdots\right).$$

Izračunajte kubni korijen nekog broja (sami si zadajte broj) i uvjerite se koja je aproksimacija brža, a koja preciznija.