Kvadrat udaljenosti dviju točaka

Tvrtko Tadić

Cilj ovog članka je upoznati čitatelje s jednom klasom zadataka iz geometrije koji se mogu relativno lako riješiti pomoću koordinatnog sustava, a pojavljuju se na raznim natjecanjima.

Pretpostavljam da su čitatelji već upoznati s osnovnim pojmovima koordinatnog sustava kao što su formula za udaljenost dviju točaka, jednadžba pravca i sl. No, vjerojatno nisu najbolje upoznati s mogućnostima njegova korištenja. Ponovimo sada neke formule.

Formule koje ćemo koristiti

Za svake dvije točke $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ vrijedi

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Kod zadataka u kojim se pojavljuje **kvadrat udaljenosti** dviju točaka (a o takvim zadacima ćemo i govoriti), korijen koji nas u mnogim slučajima opterećuje jednostavno nestaje i naša formula postaje

$$|A_1A_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Naizgled komplicirani zadaci iz geometrije postaju jednostavni algebarski zadaci s kojima lako radimo.

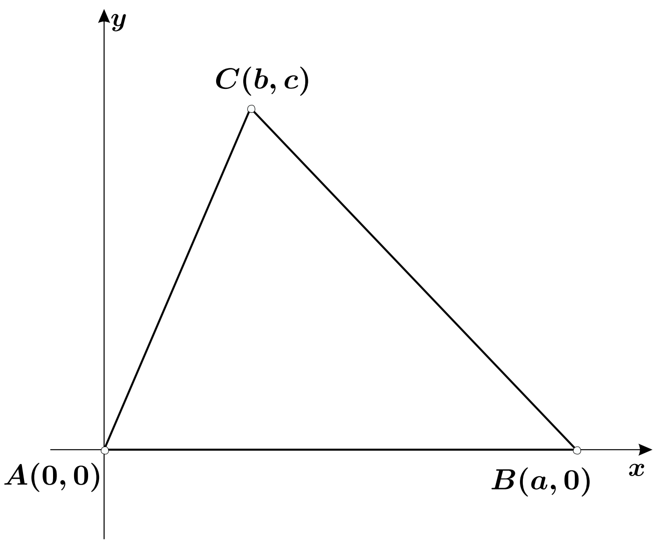
Formula za koordinate polovišta dužine $\overline{A_1A_2}$ ($A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$) je

$$P_{A_1A_2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Formula za koordinate težišta trokuta $A_1A_2A_3$ ($A_i(x_i, y_i)$ za $i = 1, 2, 3$) je

$$T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

Smještaj trokuta u koordinatni sustav



Slika 1.

Kod smještanja točaka u koordinatni sustav imamo veliku slobodu. Najčešće imamo do 3 točke, recimo A, B i C. Tada prvu točku A možemo staviti u ishodište ili $(0,0)$, drugu točku B negdje na x-os, pa joj slobodno damo koordinate $(a,0)$ (gdje je $a=|AB|$). Kod treće točke više ne možemo odabrati tako dobre brojeve, pa će točka C i svaka sljedeća imati koordinate (b,c), gdje su b i c neki realni brojevi.

Ovakvo smještanje točaka u koordinatni sustav možemo zamisliti kao konstrukciju trokuta ABC kojemu su dane duljine $|AB|$, $|BC|$ i $|CA|$. Tada za točku A odaberemo ishodište i apscisu(x-os) kao pravac na kojem leži dužina $\overline{AB}$. Daljnjim postupkom (konstrukcije) dobijemo točke B i C s gore opisanim svojstvima i jednostavno im odredimo koordinate.

Oprez! Realni brojevi b i c nemaju veze s duljinama stranica $|AC|$ i $|AB|$. Jedino vrijedi $a=|AB|$.

U potrazi za točkama

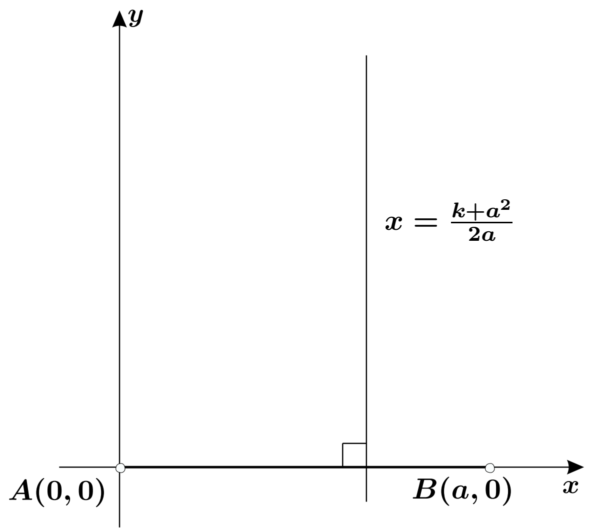
Od nas se često zahtijeva otkriti točku (ili skup točaka) koja (koje) zadovoljavaju neko svojstvo. Koordinatni sustav nam omogućava da dobijemo algebarski opis tog skupa. Najčešće su to najjednostavniji geometrijski oblici: točka, pravac i kružnica. Takav skup točaka određen nekim uvjetom zovemo *geometrijsko mjesto točaka*.

Sljedeći primjer bio je na državnom natjecanju za 2. razred.

Primjer 1. (Hrvatska 1993.) Dane su točke A i B u ravnini. Dokažite da je skup točaka M, takvih da je $|AM|^2-|BM|^2=k$ (gdje je k dani broj), pravac okomit na pravac AB.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $A(0,0)$ i $B(a,0)$. Neka je $M(x,y)$. Tada iz $|AM|^2-|BM|^2=k$ slijedi

$$k=|AM|^2-|BM|^2=(x^2+y^2)-((x-a)^2+y^2)=2xa-a^2.$$



Slika 2.

Dobili smo da je skup točaka M određen jednadžbom $x=\dfrac{k+a^2}{2a}$, a to je pravac paralelan s y-osi, dok je pravac AB podudaran sa x-osi, dakle skup točaka M je pravac okomit na AB. ✓

Primjer 2. Odredi točku T u ravnini trokuta ABC, takvu da je izraz

$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2,$$

najmanji moguć.

Rješenje. Neka su koordinate vrhova trokuta $A(0,0)$, $B(a,0)$ i $C(b,c)$, a tražimo koordinate točke $T(x,y)$. Izrazimo sada vrijednost traženog izraza preko koordinata:

$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2=x^2+y^2+(x-a)^2+y^2+(x-b)^2+(y-c)^2=3x^2-x(2a+2b)+3y^2-2yc+a^2+b^2+c^2,$$

što transformacijom postaje

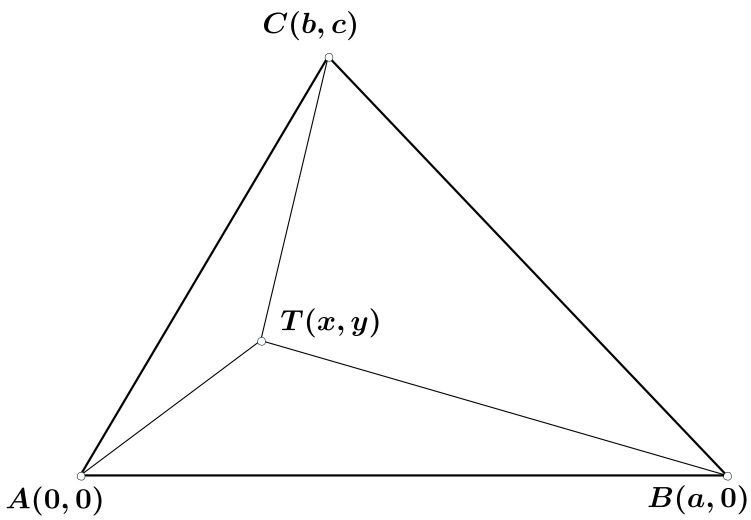
$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2 = 3\left(y-\frac{c}{3}\right)^2 + 3\left(x-\frac{a+b}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}(c^2+a^2-ab+b^2).$$

Veličine a, b, c su stalne; nas zanima koje vrijednosti x i y treba uzeti da traženi izraz bude što manji. Kako je

$$\left(x-\frac{a+b}{3}\right)^2 \geq 0, \quad (1)$$

$$\left(y-\frac{c}{3}\right)^2 \geq 0, \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad |AT|^2+|BT|^2+|CT|^2 \geq \frac{2}{3}(c^2+a^2-ab+b^2).$$



Slika 3.

Najmanja vrijednost očito se postiže kad u (1) i (2) vrijedi jednakost, tj. kad je $x = \dfrac{a+b}{3}$ i $y = \dfrac{c}{3}$. Tražene koordinate su $T\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$, a to su koordinate težišta trokuta ABC. ✓

Napomena. Primijetimo da smo pokazali kako za svaku točku T u ravnini trokuta ABC vrijedi

$$|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2 \geq \frac{a^2+(a-b)^2+c^2+(c^2+b^2)}{3} = \frac{|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2}{3}.$$

Primjer 3. (Prijedlog za MMO 1995.) Neka su A, B i C tri nekolinearne[1] točke. Dokaži da postoji jedinstvena točka X u ravnini ABC takva da je

$$|XA|^2+|XB|^2+|AB|^2 = |XB|^2+|XC|^2+|BC|^2 = |XC|^2+|XA|^2+|CA|^2.$$

Rješenje. Kao što vidimo, ovaj zadatak sličan je primjeru 1. Kada izostavimo jednu jednakost (od gornjih triju) dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{aligned}
|XA|^2-|XC|^2 &= |BC|^2-|AB|^2,\\
|XB|^2-|XA|^2 &= |CA|^2-|BC|^2,\\
|XC|^2-|XB|^2 &= |AB|^2-|CA|^2.
\end{aligned}$$

[1] Tri točke koje ne leže na istom pravcu.

Iz svake od gornjih jednadžbi zaključujemo (koristeći iskustvo iz primjera 1) da točka X leži na tri pravca, a sad još samo moramo pokazati da se ta tri pravca i sijeku u jednoj točki. Uvrstimo točke u koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$, $B(a,0)$ i $C(b,c)$. Točku $X(x,y)$ tražimo. Vrijedi

$$|XA|^2 = x^2 + y^2, \quad |XB|^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad |XC|^2 = (x-b)^2 + (y-c)^2;$$

$$|AB|^2 = a^2, \quad |BC|^2 = (b-a)^2 + c^2, \quad |CA|^2 = b^2 + c^2.$$

Koristeći to dobivamo da koordinate točke X moraju zadovoljavati

$$\begin{aligned} xb + yc &= b^2 + c^2 - ab, \\ x &= a - b, \\ x(b-a) + yc &= b^2 + c^2 - a^2. \end{aligned}$$

Taj sustav ima jedinstveno rješenje, $(x,y) = \left(a - b, \dfrac{2b^2 + c^2 - 2ab}{c}\right)$. To je ujedno i tražena točka. ✓

Polovišta i težišnice

U prethodnom dijelu dotaknuli smo se težišta. Ako se u zadacima pojavljuju polovišta, težišta, težišnice i sl, ne bi ih se trebalo bojati.

Pogledajmo sljedeći zadatak s državnog natjecanja za prvi razred.

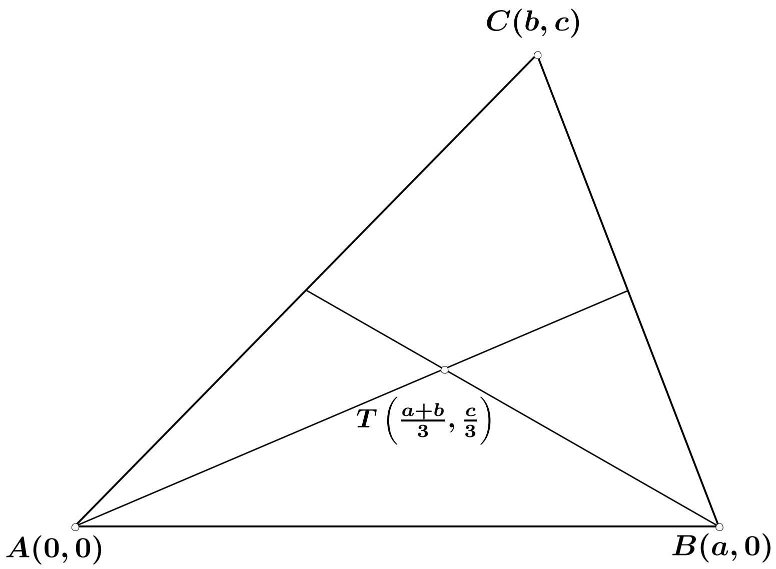
Primjer 4. (Hrvatska 2004.) Dokažite da su težišnice iz vrhova A i B trokuta ABC međusobno okomite ako i samo ako za duljine stranica vrijedi jednakost

$$|BC|^2 + |AC|^2 = 5|AB|^2.$$

Rješenje. Postavimo standardno $A(0,0)$, $B(a,0)$ i $C(b,c)$. Izrazimo $|BC|^2 + |AC|^2 = 5|AB|^2$ u našim koordinatama:

$$((a-b)^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = 5a^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 + b^2 = 2a^2 + ab. \quad (1)$$

Težišnice se sijeku u težištu $T\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$. Težišnice iz A i B okomite su ako i samo ako je trokut ABT pravokutan s pravim kutom u vrhu T. Ako je to tako, po Pitagorinom poučku i njegovom obratu mora vrijediti $|AT|^2 + |TB|^2 = |AB|^2$,



Slika 4.

što izraženo u našim koordinatama znači

$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2+\left(a-\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad c^2+b^2=2a^2+ab. \quad (2)$$

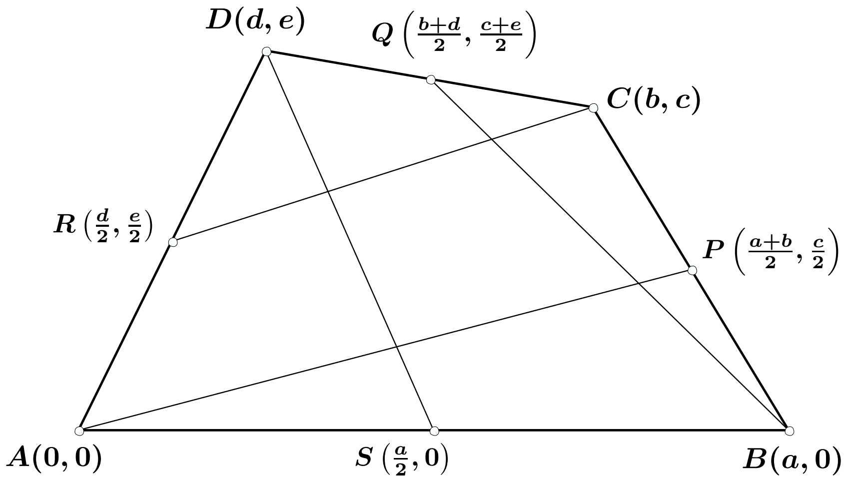
Tvrdnje (1) i (2) dokazuju tvrdnju zadatka. ✓
Za kraj pogledajmo još jednu geometrijsku nejednakost u četverokutu.

Primjer 5. (MEDITERANSKO MATEMATIČKO NATJECANJE 2000.) Točke P, Q, R i S polovišta su stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ konveksnog četverokuta $ABCD$. Dokažite da je

$$4(|AP|^2+|BQ|^2+|CR|^2+|DS|^2)\leq 5(|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2).$$

Rješenje. Prve tri točke možemo staviti kao za trokut, $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$. Točki D ćemo pridružiti neke realne brojeve d i e dakle $D(d,e)$. Redom dobivamo

$$P\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right),\ Q\left(\frac{b+d}{2},\frac{c+e}{2}\right),\ R\left(\frac{d}{2},\frac{e}{2}\right),\ S\left(\frac{a}{2},0\right).$$



Slika 5.

Korištenjem formule za udaljenost točaka dobivamo

$$4|AP|^2+4|BQ|^2+4|CR|^2+4|DS|^2=(a+b)^2+c^2+(2a-b-d)^2+(c+e)^2+(2b-d)^2+(2c-e)^2+(2d-a)^2+4e^2,$$

dok je

$$5(|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2)=5a^2+5\,(a-b)^2+5c^2+5\,(b-d)^2+5\,(c-e)^2+5d^2+5e^2.$$

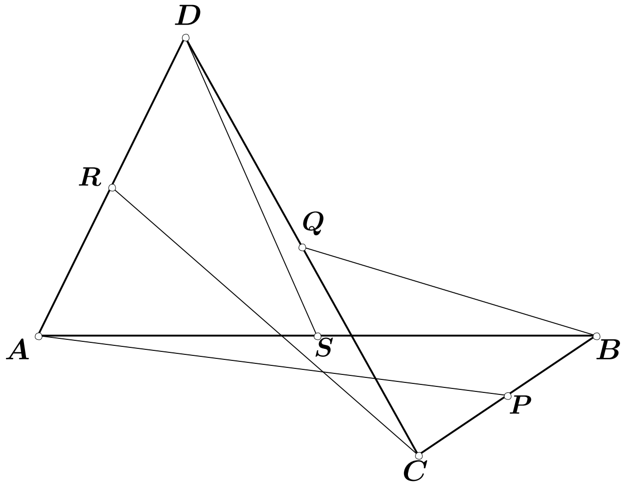
Oduzimanjem pretposljednje od posljednje jednakosti dobivamo

$$4a^2+4d^2-8ab+4b^2+8ad-8bd-8ce+4c^2+4e^2=4(d+a-b)^2+4(c-e)^2.$$

Naša početna nejednakost je istovrijedna s $4(d+a-b)^2+4(c-e)^2\geq 0$. Primijetimo da jednakost vrijedi kada je $d=a-b$ i $e=c$. Lakom provjerom uviđamo da je tada $ABCD$ paralelogram. ✓
Napomena. Nigdje nismo koristili činjenicu da je četverokut $ABCD$ konveksan, pa smo dokazali da tvrdnja zadatka vrijedi za svaki pa i nekonveksni četverokut.

Završni komentari

Nadam se da su se čitatelji uvjerili u uspješnost ove metode. Naravno treba imati na umu da se neki zadaci mogu riješiti uz njezinu pomoć, ali tek uz dugotrajno računanje („*kopanje*"). Čitatelji su pozvani da pokušaju *standardnim* metodama riješiti prikazane primjere.



Slika 6. Nejednakost iz primjera 5. vrijedi čak i za ovaj četverokut!

Dodatak – uz pomoć računala

Ovi zadaci (i mnogi teži) jednostavno se rješavaju uz pomoć računala. Pomoću računala s lakoćom možemo istraživati i dokazivati tvrdnje u geometriji. Ovdje ćemo dokazati primjere 3. i 5. Sve račune koje smo u prethodnom dijelu radili ručno, sad ćemo izračunati pomoću programa MAPLE.

Za početak upišimo točke koordinate točaka $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$ i $D(d,e)$, one su tijekom cijelog članka ostale iste.

```
> tA:=[0,0]:  tB:=[a,0]:  tC:=[b,c]:
> tD:=[d,e]:
```

Točke smo upisali kao uređeni par. Ako nas zanima recimo apscisa (x-koordinata) točke A, onda pišemo:

```
> tA[1];
```

$$0$$

Želimo li znati ordinatu (y-koordinatu) točke C, onda pišemo:

```
> tC[2];
```

$$c$$

Uprogramirajmo formule koje ćemo koristit. Prvo formulu $|AB|^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$:

```
> d2:=(A,B)->(A[1]-B[1])^2+(A[2]-B[2])^2;
```

$$d2 := (A,B) \mapsto (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2$$

Dajmo računalu da izračuna kvadrat udaljenosti točaka $(1,1)$ i $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

```
> d2([1,1],[(2+sqrt(2))/2,(2-sqrt(2))/2]);
```

$$1$$

No osim s brojevima, MAPLE zna računati i s algebarskim izrazima[2]. Neka nam odredi $|AC|^2$.

```
> d2(tA,tC);
```

$$b^2 + c^2$$

Sada ćemo riješiti primjer 3. Upišimo točku X.

```
> tX:=[x,y]:
```

Jednakost $|XA|^2 - |XB|^2 = |BC|^2 - |AB|^2$ zapisujemo kao:

```
> j1:=d2(tX,tA)-d2(tX,tC)=d2(tB,tC)-d2(tA,tB);
```

$$j1 := x^2 + y^2 - (x-b)^2 - (y-c)^2 = (a-b)^2 + c^2 - a^2$$

U izrazu j1 ostala je zapisana naša jednakost. Na isti način upisujemo $|XB|^2 - |XA|^2 = |CA|^2 - |BC|^2$ i $|XC|^2 - |XB|^2 = |AB|^2 - |CA|^2$.

```
> j2:=d2(tX,tB)-d2(tX,tA)=d2(tC,tA)-d2(tB,tC):
> j3:=d2(tX,tC)-d2(tX,tB)=d2(tA,tB)-d2(tC,tA):
```

Na kraju rješavamo sustav jednadžbi j1, j2 i j3.

```
> solve({j1,j2,j3},{x,y});
```

$$\left\{x = a - b, y = -\frac{2\,ab - 2\,b^2 - c^2}{c}\right\}$$

Kako bismo riješili primjer 5., moramo uprogramirati naredbu za polovište.

```
> pol:=(A,B)->[(A[1]+B[1])/2,(A[2]+B[2])/2];
```

$$pol := (A,B) \mapsto [1/2\,A_1 + 1/2\,B_1, 1/2\,A_2 + 1/2\,B_2]$$

Računalo će sada lako izračunati koordinate točke P.

```
> tP:=pol(tB,tC);
```

$$tP := [1/2\,a + 1/2\,b, 1/2\,c]$$

```
> tQ:=pol(tC,tD): tR:=pol(tD,tA):
> tS:=pol(tA,tB):
```

Upišimo u računalo $iz1 := |AP|^2 + |BQ|^2 + |CR|^2 + |DS|^2$ i $iz2 := |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$.

```
> iz1:=d2(tA,tP)+d2(tB,tQ)+d2(tC,tR)+d2(tD,tS):
> iz2:=d2(tA,tB)+d2(tB,tC)+d2(tC,tD)+d2(tD,tA):
```

Izračunajmo i pojednostavnimo izraz $5 \cdot iz2 - 4 \cdot iz1$.

```
> r1:=simplify(5*iz2-4*iz1);
```

$$r1 := 8\,ad + 4\,b^2 + 4\,c^2 + 4\,a^2 - 8\,ce - 8\,bd - 8\,ab + 4\,e^2 + 4\,d^2$$

Računalo zna i svoditi na kvadrat izraze, a za to je potreban paket student. Time ćemo konačno dokazati nejednakost.

```
> with(student):
> r2:=completesquare(r1,d);
> completesquare(r2,e);
```

$$4\,(e-c)^2 + 4\,(d+a-b)^2$$

[2]Vidi: *Osnovno manipuliranje izrazima u MAPLE-u*, *PlayMath* br. 1 (2003.) str. 20.