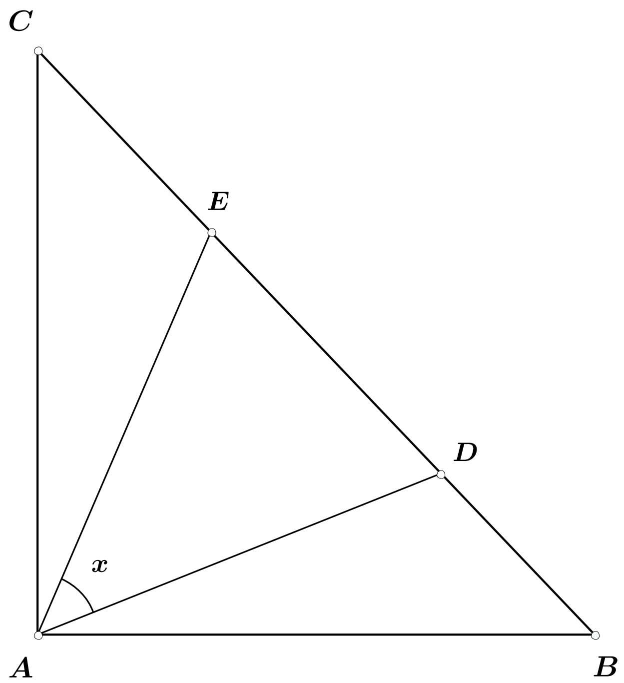
Kako je džepno računalo pogriješilo

Vanja Vagner

Mnogi matematičari, ili oni od kojih se traži da to povremeno budu, u trenutcima napetosti oslanjaju se na računala. Najčešće je riječ o džepnim računalima ili kalkulatorima. Zašto ne izbjeći eventualne pogreške uma kad vam je odgovor nadohvat ruke? To je sasvim u redu kad su u pitanju jednostavne operacije, ali kod složenijih funkcija nastaju mali problemi. Budući da je kalkulator programiran da zaokružuje zadnju znamenku ili decimalu, sitne su pogreške nezaobilazne. To uglavnom ne stvara probleme pri računanju, no ako se odvažite na višekratno računanje složenih funkcija u jednom zadatku, rizik se povećava.

Te činjenice nisu bili svjesni mladi natjecatelji trećeg razreda kada su na općinskom natjecanju 2002.g. pri rješavanju sljedećeg zadatka nesmotreno posegnuli za kalkulatorom.

Zadatak 1. U trokutu ABC duljine stranica su $|AB| = 20$, $|AC| = 21$ i $|BC| = 29$. Točke D i E su na stranici $\overline{BC}$ takve da je $|BD| = 8$ i $|EC| = 9$. Odredite veličinu kuta $\angle DAE$.



Slika 1.

Zadatak je, da ne kažemo, trivijalan. Preko poučka o kosinusima izračunamo stranice $|AD|$ i $|AE|$, te kut x koji smo tražili. No, takvim uzastopnim korištenjem funkcije kosinus dolazi do uzastopnog zaokruživanja i mi dobivamo rješenje $x = 44.99999993°$, tj. pogrešku od $2 \cdot 10^{-7}\%$. Ako ste još uz to dovoljno odvažni da duljine stranica zaokružite na samo dvije decimale, pogreška će narasti na 0.044%, a rješenje će biti drastično izmijenjeno ($x = 44.98021082°$). Naravno, vi uvijek možete za konačno rješenje napisati $x \approx 45°$ i nadati se naklonosti komisije, ali dugogodišnja ispitivanja pokazala su da znak $\approx$ nije odveć popularan među matematičarima.

Bit je dakle izbjeći, što je više moguće korištenje ove ,,*prevarantske*" naprave i malo se više osloniti na vlastitu domišljatost, što bi na našem primjeru trebalo izgledati ovako: nakon što uočimo da je ABC

pravokutan trokut (jer je $20^2 + 21^2 = 29^2$):

$$\begin{aligned}
|AD|^2 &= |DB|^2 + |AB|^2 - 2|DB||AB|\cos\beta \\
&= 64 + 400 - 2\cdot 8\cdot 20\cdot \frac{20}{29} = \frac{7056}{29}, \\
|AE|^2 &= |CE|^2 + |AC|^2 - 2|CE||AC|\cos\gamma \\
&= 81 + 441 - 2\cdot 9\cdot 21\cdot \frac{21}{29} = \frac{7200}{29}, \\
|ED|^2 &= |AE|^2 + |AD|^2 - 2|AE||AD|\cos x.
\end{aligned}$$

$$\cos x = \frac{|AE|^2 + |AD|^2 - |ED|^2}{2|AE||AD|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad x = 45^\circ.$$

Svako računalo za broj ima rezerviran izvjestan broj mjesta. Prosječno džepno računalo može broj izračunati na 12 decimala. Prikažimo što će se ovdje dogoditi ako koristimo takvo računalo (MAPLE će nam simulirati kalkulator pomoću naredbe evalf(x, 12), koja će izračunati brojeve x na 12 decimala). Neka je $t = |AD|$, $u = |AE|$ i $v = |ED|$. Prvo ćemo odrediti koliko je t^2, t; u^2, u i upisat ćemo vrijednost $v = 12$.

```
> t2:=evalf(7056/29,12);
```

$$t2 := 243.310344828$$

```
> t:=evalf(sqrt(t2),12);
```

$$t := 15.5984084069$$

```
> u2:=evalf(7200/29,12);
```

$$u2 := 248.275862069$$

```
> u:=evalf(sqrt(u2),12);
```

$$u := 15.7567719432$$

```
> v:=12;
```

$$v := 12$$

Preostaje nam odrediti vrijednost $\cos x$ koju ćemo označiti s *cosx*.

```
> cosx:=evalf((t^2+u^2-v^2)/t/u/2,12);
```

$$cosx := 0.707106781185$$

Na kraju odredimo vrijednost x u stupnjevima.

```
> evalf(arccos(cosx)/Pi*180,12);
```

$$45.0000000002$$

Kao što vidimo, greška nije velika; međutim, ako se odlučite vrijednosti t i u zaokružiti na 2 decimale (kako biste ih zapisali na papir), dobit ćete 44.9926317661.

Kalkulator uistinu radi sitne pogreške, no kako on uopće dolazi do vrijednosti za trigonometrijske funkcije? Računalni programi te vrste se, umjesto očitavanja trigonometrijskih vrijednosti s unaprijed unesenih tablica, služe algoritmima koji nam daju približnu vrijednost sinusa i kosinusa određenog kuta. Postoji više takvih algoritama, a zanimljivo je da se većina njih bazira na osnovnim računskim operacijama.

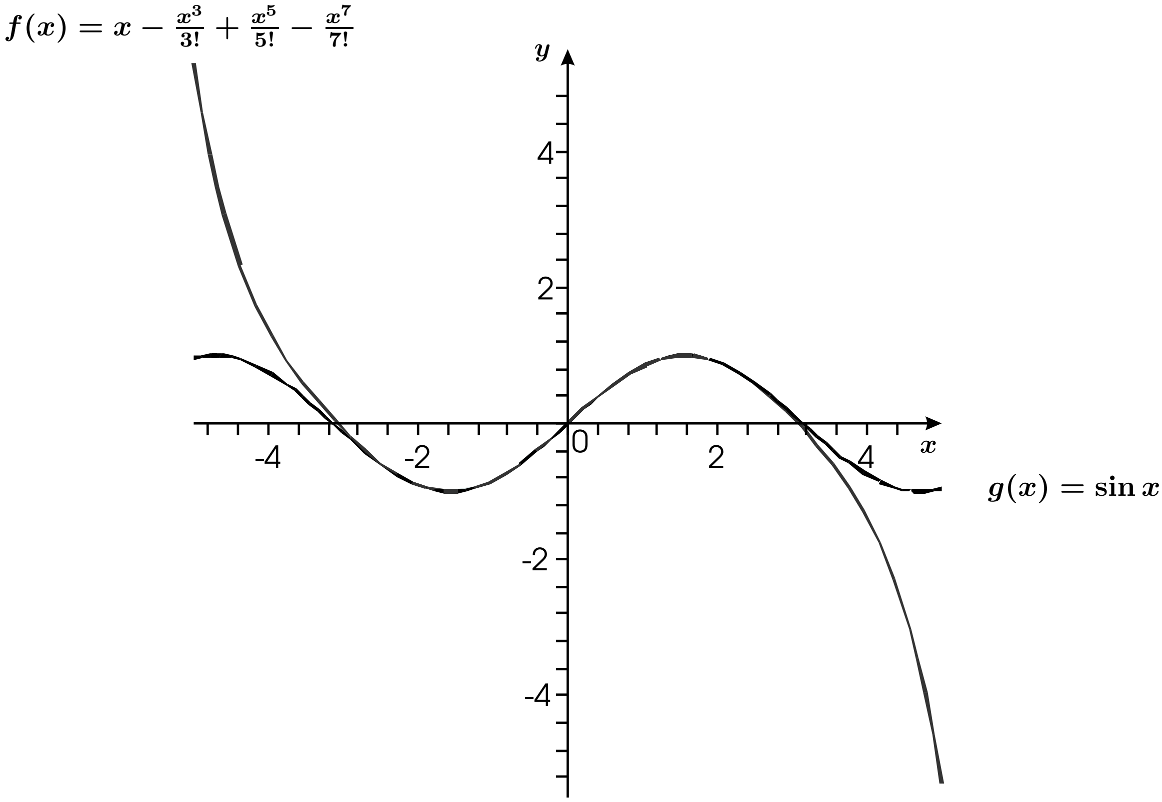
Primjer jednog takvog algoritma je Taylorova formula koja određene funkcije kompliciranih formula zamjenjuje jednostavnijima. Tu, naravno, dolazi do aproksimacije vrijednosti funkcije, koja za sobom vuče i određenu pogrešku. Taylorove formule za sinus i kosinus zapravo su zbroj redova

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots
\end{aligned}$$

($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$, npr. $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$)

pri čemu je x nužno u radijanima. Računalo će zbrajati sve dok izraz $\frac{x^n}{n!}$ ne postane toliko malen da ga više neće izračunati, te će ga zaokružiti na 0.

Što više članova niza uzmemo u obzir pri našem računanju, to će aproksimacija biti točnija i to će se graf uzetog polinoma sve više približavati izvornom grafu za sinus, odnosno kosinus.



Slika 2.

Na gornjem grafu vidimo kako se krivulja Taylorovog polinoma određenog s prva 4 člana niza gotovo poklapa s grafom sinusa na intervalu $[-\pi, \pi]$. Iako su na slici gotovo identični, ova dva grafa se ipak ne podudaraju u potpunosti.

Ocjena pogreške sastavni je dio aproksimacije vrijednosti funkcije. Budući da je pogreška pri računanju trigonometrijskih funkcija manja od apsolutne vrijednosti sljedećeg ispuštenog člana niza, lako ju je odrediti. Uzmimo za primjer kut $x = \pi/4$, $\sin\frac{\pi}{4}$ ćemo računati po Taylorovom nizu uzevši u obzir prva tri člana, odnosno za $n = 2$. Dobit ćemo

$$T_{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{(\pi/4)^3}{3!} + \frac{(\pi/4)^5}{5!} = 0.707143046\ldots,$$

dok je

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106781\ldots$$

Pogreška pri ovom računu će stoga biti manja od sljedećeg ispuštenog člana, odnosno

$$R_{2n+1} = \left|\frac{(\pi/4)^7}{7!}\right| = 0.000036576\ldots < 10^{-4}.$$

Kalkulatori se pri računanju trigonometrijskih funkcija također često koriste i CORDIC algoritmom, koji promatra kutove kao faze kompleksnog broja unutar kompleksne ravnine.

Zapravo, kalkulatori i računalni programi koriste se nekom vrstom algoritama koji se baziraju na osnovnim računskim operacijama, kako bi izračunali ne samo trigonometrijske vrijednosti, nego i vrijednosti korijena i drugih funkcija. Grana matematike koja se bavi razvijanjem takvih algoritama zove se numeričke metode, te je jedno od zanimljivijih područja matematike, sa širokom primjenom u razvoju današnje tehnologije.