Split 1984.

Ovogodišnje državno natjecanje trebalo se održati u Splitu, međutim zbog organizacijskih nemogućnosti održano je u susjednom Trogiru. Zanimljivo je da je prije točno 20 godina (tadašnje) republičko natjecanje za Hrvatsku održano upravo u Splitu! Predsjednik (tada) republičke komisije bio je Zdravko Kurnik. Možemo reći da se povijest ponovo ponavlja. Mnogi od tadašnjih natjecatelja danas su članovi komisije. U susret ovogodišnjem državnom natjecanju objavljujemo zadatke koji su se pojavili te godine u Splitu. Koliko je hrvatska matematika napredovala od tada do danas procijenite sami. Gradivo koje se učilo tada i danas u pojedinim razredima se sigurno promijenilo. Pravim ljubiteljima matematike to neće predstavljati nikakav problem. Uživajte!

Još jedna zanimljivost ovog natjecanja: postojao je neobavezni dio koji se sastojao od izlaganja pismenih samih učenika. Teme za radnju predložila je komisija, a učenici su ih iznosili nakon natjecanja.

Prvi razred

1. Baza piramide $ABCD$ je pravokutan trokut ABC, a njezini pobočni bridovi jednake su duljine. Neka je E nožište visine trokuta spuštene iz vrha C pravog kuta. Dokaži da je trokut CED pravokutan.

2. Zadane su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokaži tvrdnju:

   Ako je f bijekcija i ako za svaki realan broj x vrijedi
   $$f(x) + g(x) = 2,$$
   tada postoji jedan i samo jedan broj x_0 takav da je
   $$f^2(x) + g^2(x) = 2.$$
   Napomena. $f^2(x) = f(f(x))$

3. Nađite sve trojke cijelih brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju jednakost:
   $$3(a-3)^2 + 6b^2 + 2c^2 + 3b^2c^2 = 33.$$

4. Dokaži nejednakost
   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Komentar: Mišljenje je uredništva da je 2. zadatak danas primjereniji 4. razredu.

Drugi razred

1. U ravnini četverokuta $ABCD$ dana je točka P, koja je spojena s polovištima njegovih stranica. Polovištem svake stranice četverokuta povučeni su pravci paralelni s dužinama koje spajaju točku P i polovišta nasuprotne stranice. Dokaži da se ta četiri pravca sijeku u jednoj točki.

2. Polinom $P(x)$ pri dijeljenju s $(x-1)$ daje ostatak 1, pri dijeljenju s $(x-2)$ ostatak 3, a pri dijeljenju s $(x-3)$ ostatak 7. Koliki se ostatak dobiva pri dijeljenju polinoma $P(x)$ s $(x-1)(x-2)(x-3)$?

3. Riješi sustav jednadžbi
   $$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2,$$
   $$\log_9 x + \log_3 y + \log_9 z = 2,$$
   $$\log_{16} x + \log_{16} y + \log_4 z = 2.$$

4. U jednakokračnom trokutu ABC dana je duljina osnovice a i kut uz osnovicu α. Neka je k ružnica koja dodiruje oba kraka trokuta i njemu opisanu kružnicu. Izrazi polumjer kružnice k pomoću a i α.

Treći razred

1. Dokaži tvrdnju: Ako je u trokutu ABC kut γ dvaput veći od kuta α tada su duljine stranica trokuta povezane relacijom $c^2 = a^2 + ab$. Vrijedi li obrat ove tvrdnje?

2. Odredi i predoči u kompleksnoj ravnini skup svih točaka

$$\left\{ z = \frac{3t+1}{t-i} \vdots \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - x + 1 = 0$. Pokaži da skup

$$\{x_1^n + x_2^n \vdots \ n \in \mathbb{N}\}$$

ima samo 2 elementa. Koji su to elementi?

4. Interval $[0, 1]$ pokriven je konačnim brojem manjih intervala. Dokaži da se može izabrati nekoliko tih intervala koji se u parovima ne presijecaju i za koje je suma njihovih duljina ne manja od $\frac{1}{2}$.

Četvrti razred

1. U konveksan mnogokut s neparnim brojem stranica upisana je kružnica. Dokaži tvrdnju: Ako su duljine svih stranica mnogokuta racionalni brojevi, tada su i duljine odrezaka na koje dirališta s kružnicom dijele stranice također racionalni brojevi.

2. Nađi sve aritmetičke nizove za koje je omjer zbroja prvih n članova i zbroja sljedećih $3n$ članova neovisan o n.

3. Neka je p prost broj veći od 2. Dokaži da je

$$\left\lfloor (2+\sqrt{5})^p \right\rfloor - 2^{p+1}$$

djeljiv s p.

4. Zadan je skup $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Kaže se da skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ čine particiju skupa A ako je

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A, \text{ i } A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{za } i \neq j.$$

Izračunaj broj svih različitih particija skupa $\mathcal{S}$.

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 47.