Logičko–kombinatorni zadaci

Rudi Mrazović

Logičko-kombinatorni zadaci pojavljuju se na većini državnih i međunarodnih natjecanja. Oni spadaju među najteže i najslabije riješene zadatke na svakom državnom natjecanju. Primjerice, 2001., 2002. i 2004. godine logičko-kombinatorni zadatak na državnom natjecanju za treće razrede nije riješio nijedan od tridesetak učenika, dok su 2003. godine to učinila tek tri učenika.

Iako je za njih potrebno minimalno poznavanje gradiva (često se samo koristi metoda *zdravog razuma*), ipak postoje neke metode i *trikovi* koji se vrlo često koriste pri njihovom rješavanju. Najčešći su traženje invarijante, matematička indukcija, pravilo krajnjeg (*ekstremnog*) elementa, Dirichletovo pravilo, bojanja i prebrojavanja.

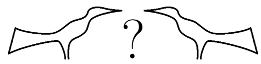
Traženje invarijante svodi se na traženje veličine koja se nikada ne mijenja. Uz traženje invarijante vrlo je slična metodi traženja takozvane *monovarijante*, odnosno veličine koja pri svakoj transformaciji raste ili pada.

Princip matematičke indukcije vrlo je poznat alat i mogli ste ga naučiti u prošlom broju *PlayMath*-a.

Pravilo krajnjeg (ekstremnog) elementa svodi se na traženje ili izbor veličine koja je *ekstremna* (najmanja površina, najveća udaljenost, najbliža polja, najudaljenije točke, ...).

Dirichletovo pravilo[1] lako je razumljivo. Poznato je i kao pravilo golubinjaka (eng. *pigeonhole principle*) zbog sljedeće formulacije:

Ako imamo n golubinjaka u koje moramo smjestiti $n+1$, goluba onda ćemo u barem jedan golubinjak morati smjestiti barem 2 goluba.



Bojanje je također vrlo česta metoda koja se koristi pri rješavanju logičko-kombinatornih zadataka. Radi se o tome da se svakom elementu nekog skupa pridruži određena boja, koja će poslije koristiti u dokazivanju neke tvrdnje. Često se koristi uz neku invarijantu ili pak Dirichletovim pravilom (principom).

Kao što i sam naziv govori, prebrojavanja označavaju traženje broja elemenata nekog skupa. Često se koriste u kombinaciji sa Dirichletovim principom.

Primjer 1. U tri hrpe nalaze se redom 51, 49 i 5 kamenčića. Možete spojiti bilo koje dvije hrpe ili podijeliti hrpu koja ima paran broj kamenčića na dvije hrpe s jednakim brojem kamenčića. Možete li na taj način razdvojiti svih 105 kamenčića?

Rješenje. Odgovor je ne. Uočimo da ako je broj kamenčića u svakoj hrpici djeljiv s nekim neparnim prirodnim brojem, sve hrpe koje ćemo kasnije dobivati također će biti djeljive s tim brojem. To će biti **invarijanta** koju tražimo, odnosno *ono nešto* što se ni u jednoj transformaciji neće promijeniti. Dokažimo to. Neka su sve hrpe djeljive s nekim neparnim prirodnim brojem k. Neka je broj kamenčića u l-toj hrpici oblika $n_l \cdot k$. Ako spojimo i-tu i j-tu hrpicu, broj kamenčića u novoj hrpici iznosit će

$$k \cdot n_i + k \cdot n_j = k \cdot (n_i + n_j)$$

Odatle vidimo da će i broj kamenčića u novoj hrpici biti djeljiv s k. Neka je broj kamenčića u nekoj hrpi oblika $2 \cdot k \cdot m$. Ako tu hrpu raspolovimo, broj kamenčića u svakoj od dvije nove hrpice iznosit će

$$\frac{2 \cdot k \cdot m}{2} = k \cdot m$$

Dakle, broj kamenčića u svakoj hrpici također će biti djeljiv s k. Na početku je broj kamenčića u svakoj hrpici neparan, što znači da će prvi potez biti spajanje nekih dviju hrpica. Tako možemo dobiti jednu od sljedećih kombinacija:

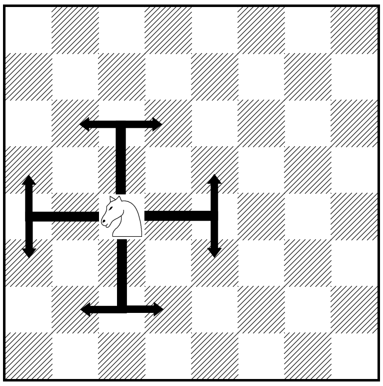
U prvoj hrpici nalazit će se 100, a u drugoj 5 kamenčića.
U prvoj hrpici nalazit će se 54, a u drugoj 51 kamenčić.
U prvoj hrpici nalazit će se 56, a u drugoj 49 kamenčića.

[1] S Dirichletovim pravilom sreli smo se u članku *Logika dokazivanja II. dio*, primjer 7., str 7. *PlayMath* br. 2. (2003.)

U prvom slučaju broj kamenčića u oba dvije hrpice je djeljiv sa 5, u drugom sa 3, a u trećem sa 7. Kako na kraju u svakoj hrpici treba bit po samo jedan kamenčić, a broj 1 nije djeljiv ni s 3, ni s 5, ni sa 7, pa vidimo da je to nemoguće ostvariti. ✓

Primjer 2. Može li skakač (konj), pomičući se na propisan način, na standarnoj (8×8 crno-bijeloj) šahovskoj ploči odabrati takav put da pošavši od gornjeg lijevog kuta ploče dođe na njezin donji desni kut, a da pritom na svako pojedino polje ploče dođe točno jedanput (tj. da nijedno polje ne izostavi i da ni na jedno ne dođe više puta)?

Rješenje. Ne može. **Obojimo** ploču na uobičajen način. Uočimo da se pri svakom pomaku skakača, mijenja boja polja na kojem se nalazi - ako je prije bio na bijelom, može odatle skočiti samo na crno i obrnuto. To znači da će nakon parnog broja skokova skakač biti na polju iste boje kao što je ono s kojeg je započeo skakati, a nakon neparnog broja skokova bit će na polju suprotne boje.



Slika 1. Skakač s bijelog skače na crno polje!

Da bi na svakom polju ploče bio točno jedanput, skakač mora učiniti 63 skoka, a to je neparan broj. Prema tome, nemoguće je da pritom stigne od gornjeg lijevog na donje desno polje ploče, jer su ona iste boje. ✓

Primjer 3. Dan je lanac domina koje su složene prema uobičajenom pravilu. Možeš provoditi sljedeću operaciju: nađi podlanac u kojem prvi domino ima jednak broj točkica kao zadnji (misli se na *polovice* domina), izvadi ga, zakreni za $180°$ i vrati na isto mjesto. Dokaži da ako su dana dva lanca sastavljena od jednakih domina, tako da počinju i završavaju s jednakim brojem točkica, onda se jedan lanac može transformirati u drugi koristeći opisanu operaciju.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati **indukcijom** po broju n komada domina u lancu. Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Promatrajmo općeniti slučaj kad je prvi broj u lancu jednak a. Neka je prvi domino u prvom lancu (a, b), a u drugome (a, c). Ako je $b = c$, tada koristimo pretpostavku indukcije. Pretpostavimo da je $b \neq c$. Tada se (a, b) nalazi negdje u drugome lancu ali ne na prvom mjestu. Ako se (a, b) nalazi u *okrenutom* obliku (b, a), tada vršimo operaciju nad podlancem od (a, c) do (b, a), a zatim koristimo pretpostavku indukcije. Pretpostavimo sada da (a, b) nije *okrenut*.

Dokaz će biti završen ako dokažemo da (a, b) možemo okrenuti (onda ćemo postupiti kao i maloprije, a zatim koristiti pretpostavku indukcije). U prvom lancu neka je (d, e) prvi domino koji se ne pojavljuje iza (a, b) u drugom lancu. Neka je domino prije (d, e) u prvome lancu domino (f, d). Tada se ovaj domino u drugom lancu pojavljuje poslije (a, b) (možda u *okrenutom* obliku). S druge strane, domino (d, e) u drugom se lancu pojavljuje prije (a, b), također možda *okrenut*. Promatramo četiri konfiguracije drugog lanca i gledamo kako postići da (a, b) okrenemo.

(i) $(a, c), \ldots, (d, e), \ldots, (a, b), \ldots, (f, d), \ldots$

Provodimo operaciju na podlancu od (d, e) do (f, d).

(ii) $(a, c), \ldots, (d, e), \ldots, (a, b), \ldots, (d, f), \ldots$

Provodimo operaciju na podlancu od (d, e) do (g, d), gdje je (g, d) domino prije (d, f).

(iii) $(a, c), \ldots, (e, d), \ldots, (a, b), \ldots, (f, d), \ldots$

Provodimo operaciju na podlancu od (d, h) do (f, d), gdje je (d, h) domino iza (e, d).

(iv) $(a, c), \ldots, (e, d), \ldots, (a, b), \ldots, (d, f), \ldots$

Provodimo operaciju na podlancu od (d, i) do (j, d), gdje je (d, i) domino iza (e, d), a (j, d) domino prije (e, d).

✓

Primjer 4. Svaki od n građana zna dio nekog trača. Dopušteno im je da preko telefona razmijene sve što znaju vezano uz trač. Tijekom jednog poziva samo jedno osoba govori. Odredi najmanji broj poziva potrebnih da bi svaki građanin znao cijeli trač.

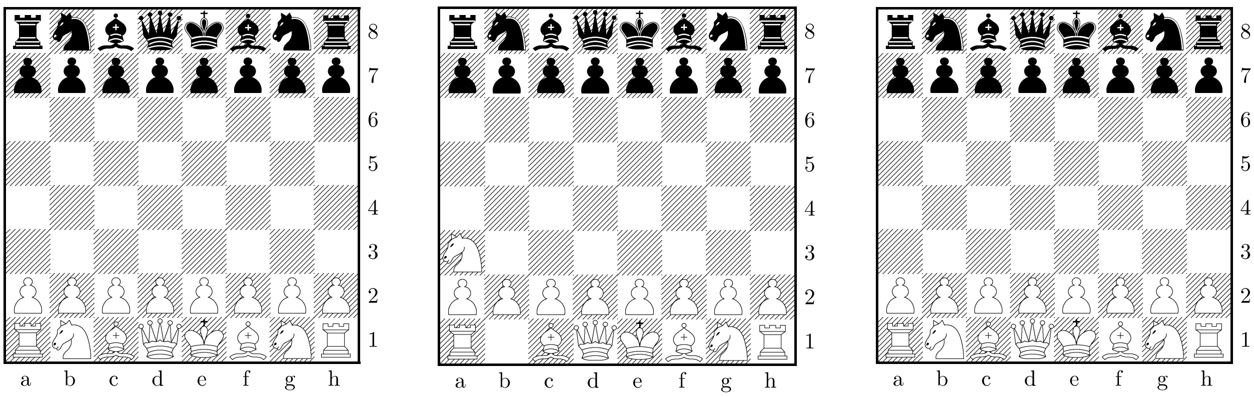
Rješenje. Promatrajmo prvi trenutak (**najraniji**) kada neka osoba zna cijeli trač. Za to je očito potrebno barem $n-1$ poziva. To je zato jer je svaka druga osoba morala nekom reći dio trača koji ona zna. S druge strane, u tom trenutku svakoj drugoj osobi nedostaje barem jedan djelić trača (jer ostale osobe ne znaju cijeli trač), pa je zato potrebno još barem $n-1$ poziva. Dakle, ukupno je potrebno barem $(n-1)+(n-1)=2n-2$ poziva. Lako je pokazati da je to moguće izvesti u točno $2n-2$ poziva. Na primjer, jedan građanin nazove sve ostale i tako sazna cijeli trač (to je $n-1$ poziva), a zatim ih sve ponovno nazove i ispriča im cijeli trač (još $n-1$ poziva). ✓

Kako bih se ja toga sjetio?

Za kraj, evo nekoliko zadataka kojima će rješenja mnogi prokomentirati riječima: ,,*Kako bih se ja toga sjetio?*"

Primjer 5. Igra *dvostruki šah* ima ista pravila kao i obični, s jednom iznimkom: svaki igrač radi dva uzastopna poteza. Dokaži da Bijeli (koji prvi igra) ima negubitničku strategiju (odnosno može igrati tako da u svakom slučaju neće izgubiti).

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, odnosno, da kako god Bijeli igra, Crni ima odgovarajuću pobjedničku strategiju. Međutim, Bijeli može započeti igru na sljedeći način:



Nakon poteza Bijelog pozicija je ista, ali je Crni na potezu!

Bijeli pomiče skakača s **b1** na **a3** kao prvi potez i kao drugi potez vraća istog skakača s **a3** natrag na **b1**. Prema pretpostavci, Crni ima strategiju da pobijedi Bijelog. Međutim, sada se Crni nalazi u potpuno istoj situaciji u kojoj je maloprije bio Bijeli. Odatle slijedi da Bijeli ima strategiju kojom može pobijediti Crnog. Kontradikcija! ✓

Primjer 6. Na n različitih točaka kružne staze n formula (trkaćih automobila) spremno je započeti utrku. Svaka od njih vozi takvom brzinom da obiđe cijeli krug za jednu minutu. Na dani znak svaka formula odabire jedan od dva moguća smjera kojima može voziti i smjesta kreće u tom smjeru. Kada se god neke dvije formule sretnu, one promijene smjer vožnje bez ikakve promjene u brzini. Dokaži da će se u određenom trenutku sve formule ponovno nalaziti na svojoj startnoj poziciji.

Rješenje. Imenujmo automobile brojevima od 1 do n. Izmijenimo malo pravila. Pretpostavimo da, umjesto da mijenjaju smjerove vožnje, formule koje se sretnu samo promijene svoje brojeve. S ovakvim se pravilima svaki automobil kreće u jednom smjeru konstantnom brzinom. Jedan sat kasnije, nakon nekoliko promjena brojeva automobila, svaki se auto nalazi na svojoj startnoj poziciji. Kada se vratimo u stvarnost (normalnim pravilima), jedino što možemo tvrditi je da se na svakoj početnoj poziciji nakon jedne minute nalazi neka formula, ne nužno ona koja se na početku tamo nalazila. Međutim, uočimo da pravila onemogućavaju mijenjanje poretka među formulama. Drugim riječima, svaka se formula uvijek nalazi između dvije, jedne te iste formule. Dakle, svaka formula uvijek se nalazi između svojih početnih susjeda. Dakle, početna je situacija nakon jedne minute (možda) samo malo *rotirana*, odnosno za neki nenegativan cijeli broj d formula i se nalazi na početnom mjestu formule $i + d$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ (oznake su uzete modulo n). Dakle, nakon svake minute situacija iz prethodnog kruga zarotira se uvijek za isti nenegativan cijeli broj d. Nakon točno n minuta početna situacija zarotirat će se za dn mjesta, pa će u tom trenutku svaka formula biti ponovno na svojoj početnoj poziciji. ✓

Napomena. Ovaj zadatak, koji se prvi put pojavio kao mađarski prijedlog za MMO 1989., pojavio se među zadacima za ovogodišnju Hrvatsku informatičku olimpijadu (vidi www.hsin.hr).

Primjer 7. Neka polja pravokutne tablice $m \times n$ $(m < n)$ obojana su u crno, tako da svaki stupac sadrži barem jedno crno polje. Dokaži da postoji crno polje takvo da ima više crnih polja u njegovom retku nego u stupcu.

Rješenje. Zamijenimo svako crno polje u danoj tablici A s brojem $\frac{1}{k}$, gdje je k broj crnih polja u tom redu.

Tako dobivamo novu tablicu B u kojoj je zbroj brojeva u svakom retku 1 ili 0 ovisno o tome sadrži li taj redak u tablici A barem jedno crno polje ili ne. Zato zbroj S_B svih brojeva u tablici B ne prelazi m, broj redaka tablice. Na sličan način konstruirajmo tablicu C tako da svako crno polje tablice A zamijenimo brojem $\frac{1}{l}$ gdje je l broj crnih polja u njenom stupcu. Zbroj svih brojeva u svakom stupcu tablice C je uvijek točno 1, jer svaki stupac sadrži barem jedno crno polje. Zato zbroj S_C svih brojeva u tablici C iznosi točno n. Kako je $m < n$, imamo $S_B \leq m < n = S_C$. Zato barem jedno polje tablice B sadrži manji broj od odgovarajućeg polja u tablici C. Drugim riječima, za to polje vrijedi: Ako su k i l brojevi crnih polja redom u njenom retku i stupcu, onda vrijedi $\frac{1}{k} < \frac{1}{l}$, odnosno $k > l$, pa je to polje ono koje tražimo. ✓

Zadaci za vježbu

1. Grupa ljudi zakupila je sva mjesta u jednom redu u kazalištu, ali su sjeli na slučajna mjesta u tom redu. Biljeter u kazlištu može zamijeniti svake dvije susjedne osobe koje sjede na krivim mjestima (i ovu zamjenu napraviti više puta), s tim da ne može premjestiti nekoga tko sjedi na pravom mjestu. Može li biljeter smjestiti posjetitelje na prava mjesta, bez obzira na početni raspored, ako je poznato da su tada svi bili na pogrešnim mjestima?

2. Na podu se nalazi velika hrpa karata. Na svakoj karti napisan je jedan od brojeva 1, 2, ..., n. Zbroj brojeva na svim kartama iznosi $k \cdot n!$, gdje je k neki prirodni broj. Dokaži da je moguće razmjestiti karte u k hrpa, tako da je suma karata na svakoj hrpi jednaka $n!$.

3. Imamo mrežu od $(2k-1) \times (2k-1)$ kvadrata s $4k^2$ vrhova. Ti vrhovi spojeni su žicama (duž stranica kvadrata). Međutim, neke su se žice uništile. Električar može testirati prolazi li struja između neka dva vrha (tj. provjeriti postoji li lanac žica koje ih spajaju). Da bi sve bilo u redu, između svakih dvaju vrhova mora teći struja. Koliki je najmanji broj testiranja da bi električar mogao sa sigurnošću utvrditi je li sve u redu ili ipak postoje dva vrha između kojih ne protječe struja?

4. Konačan broj polja beskonačne kvadratne mreže obojen je crnom bojom. Dokažite da je u toj ravnini moguće odabrati konačno mnogo kvadrata koji zadovoljavaju svaki od sljedećih uvjeta:
   (i) Unutrašnjosti svaka dva različita kvadrata su disjunktne (imaju prazan presjek).
   (ii) Svako crno obojeno polje leži u nekom od tih kvadrata.
   (iii) Površina crnih polja u svakom od odabranih kvadrata je barem $\frac{1}{5}$, a najviše $\frac{4}{5}$ površine tog kvadrata.

5. Dane su kružnice C_1, C_2, ..., C_n polumjera 1 u ravnini takve da nikoje dvije nisu međusobno tangente i da je podskup ravnine koji čini unija ovih kružnica povezan (odnosno, za svaku particiju skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na neprazne skupove A i B, skupovi $\bigcup_{a \in A} C_a$ i $\bigcup_{b \in B} C_b$ nisu disjunktni). Dokažite da je $|S| \geq n$, gdje je
$$S = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_i \cap C_j,$$
skup sjecišta svih parova kružnica.

Za kraj

Ovaj prilog napravljen je tek kao uvod, u sljedećim brojevima *PlayMath*-a više ćete moći čitati o metodama kojima se rješavaju ovi zadaci.

U toku je izrada novog web-izdanja

Sve čitatelje obavještavamo da je toku izrada posve novog web-izdanja, na novoj lokaciji. Zbog komplikacija koje su nastale s ekipom koja održava stranice V. gimnazije, odlučili smo se preseliti. Molimo sve čitatelje za strpljenje. Hvala!

Uredništvo

Isprika

Greške se često događaju kad se radi. Naša lektorica i recenzentica temeljito ispravljaju greške u časopisu, ali zbog brzine unosa korekture često ne unesemo sve ispravke. Ispričavamo se svim čitateljima, trudit ćemo se da se to što rjeđe događa.