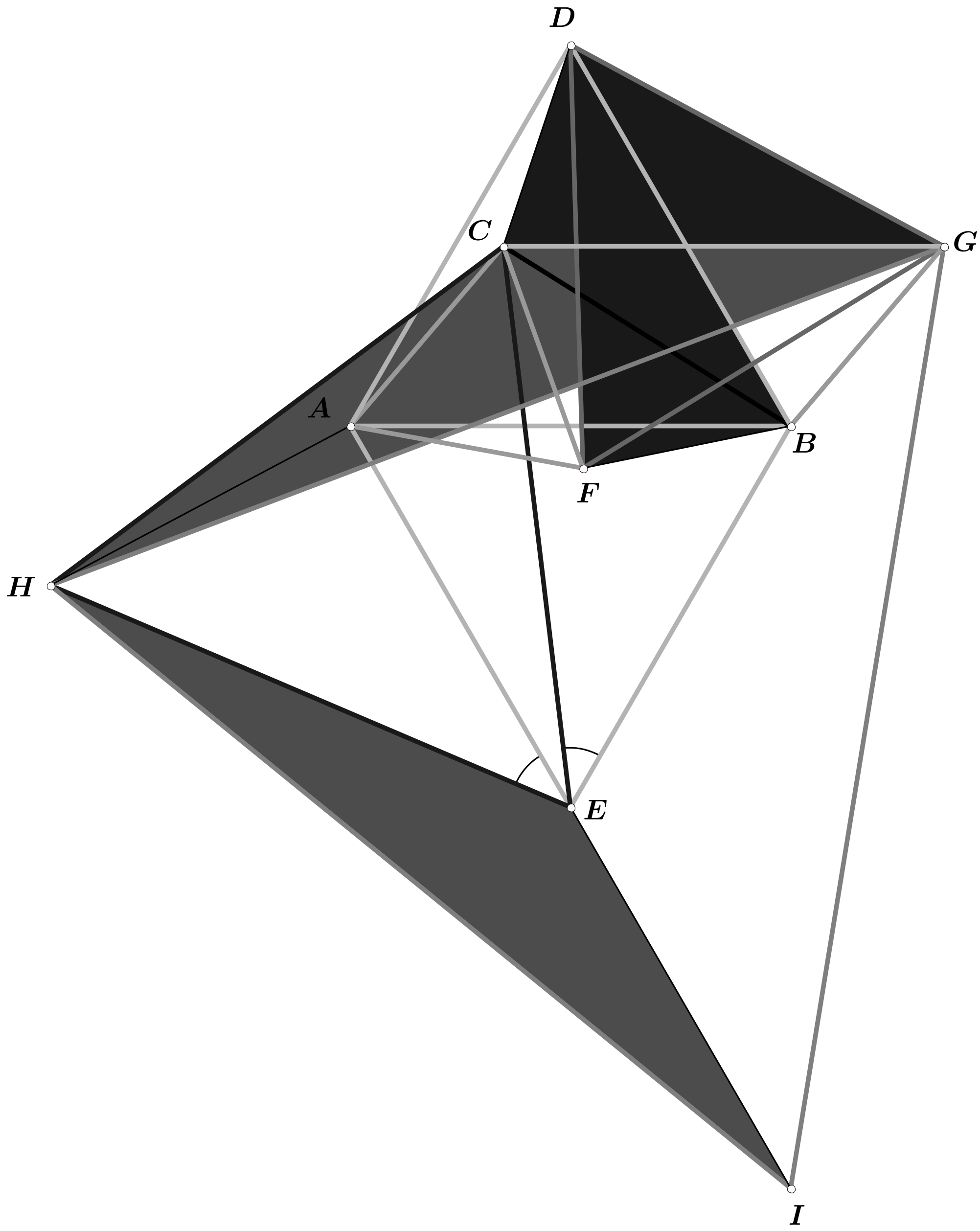
Šest jednakostraničnih trokuta i pet sukladnosti

Dijana Kreso

U 3. zadatku 4. razreda ovogodišnjeg županijskog natjecanja rijetki su uopće dobili bod, još manje učenika uspjelo ga je riješiti, uglavnom pomoću kompleksnih brojeva u geometriji. Ovdje vam donosimo jedno elementarno rješenje tog zadatka koje može razumjeti svaki učenik koji je naučio poučke o sukladnosti!

3. U ravnini su dane točke A, B, C. Neka su D, E, F, G, H i I točke u istoj ravnini takve da su trokuti ABD, BAE, CAF, DFG, ECH i GHI pozitivno orijentirani jednakostranični trokuti. Dokažite da je E polovište dužine $\overline{AI}$.

Napomena. Pozitivno orijentiran trokut XYZ znači da je poredak vrhova suprotan okretanju kazaljke na satu.



Mnogi će odmah primijetiti kako se u zadatku pojavljuje velik broj jednakostraničnih trokuta njih čak **šest**! Po tome je ovaj zadatak neobičan. No može se rješiti na elementaran (ali ne nužno i lak) način. Evo jednog rješenja.

Rješenje. Iz $|AD| = |BD|$, $|DF| = |DG|$ i

$$\angle ADF = \angle BDG = 60^\circ - \angle FDB$$

slijedi $\triangle AFD \cong \triangle BGD$, iz čega dobivamo da je $|AF| = |BG|$, a time i $|AC| = |BG|$.

Iz $|AB| = |AD|$, $|AF| = |AC|$,

$$\angle DAC = \angle BAF = 60^\circ - \angle BAC$$

slijedi $\triangle ABF \cong \triangle ADC$, iz čega dobivamo da je $|BF| = |CD|$, a to povlači $\triangle DCF \cong \triangle FBG$. Zaključujemo kako je $\angle CDF = \angle GFB$.

Dalje je zbog $|CD| = |BF|$, $|DG| = |FD|$ i

$$\angle CDG = \angle FDG + \angle FDG = \angle CDF + 60^\circ = \angle GFB + 60^\circ = \angle BFD$$

$\Rightarrow \quad \triangle CDG \cong BFD$. Time smo dobili da je $|BD| = |CG|$.

Iz $|HE| = |HC|$, $|HI| = |HG|$, i

$$\angle IHE = \angle GHC = 60^\circ - \angle EHG$$

slijedi $\triangle HEI \cong \triangle HCG$, iz čega dobivamo da je $|CG| = |EI|$.

Zbog jednakostraničnih trokuta vrijedi da je

$$|AE| = |BD| = |CG| = |IE|.$$

Time je dokazana jednakost dužina $|AE|$ i $|IE|$.

Preostaje nam dokazati da su točke A, E, I kolinearne (na istom pravcu), odnosno da je $\angle HEI + \angle HEA = 180^\circ$.

Zbog prethodno navedenog je

$$\left.\begin{aligned} \angle HEI &= \angle HCG = 60^\circ + \angle ECG = 60^\circ + \angle ECB + \angle BCG \\ \angle HEA &= 60^\circ - \angle AEC = \angle BEC = 180^\circ - \angle EBC - \angle ECB \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow \quad \angle HEI + \angle HEA = 240^\circ + \angle BCG - \angle EBC.$$

Zbog $|AB| = |GC|$ i $|CA| = |BG|$ četverokut $ABCG$ je paralelogram, pa je $\angle BCG = \angle CBA$, te je

$$\angle HEI + \angle HEA = 240^\circ + \angle CBA - \angle EBC = 240^\circ - (\angle EBC - \angle CBA) = 240^\circ - 60^\circ = 180^\circ.$$

Time smo dokazali da je E polovište dužine $\overline{AI}$. ✓

Poziv čitateljima

Naišli ste na zanimljiv zadatak na starom ili novom natjecanju ili u nekoj zbirci, a vaše rješenje je različito od službenog. Pošaljite nam ga, mi ćemo ga objaviti! Ako je zadatak s natjecanja rješenje ćemo poslati urednicima koji pripremaju knjige s natjecanja i pobrinuti se da i tamo bude objavljeno.

Također smo zainteresirani za vaše radove na računalu, ako imate zanimljivu animaciju, sliku, projekt i sl., pozivamo vas da ga podijelite s nama.

Radovi učenika bit će posebno nagrađeni!