Rješenje od prije dvije godine

Tvrtko Tadić

Na ovogodišnjem općinskom natjecanju za prve razrede dan je sljedeći zadatak:

4. Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} = 2004,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3.$$

Zadatak je bio jako slabo riješen. I prije nekoliko godina, kad se isti zadatak pojavio na natjecanju za 4. razrede, bio je slabo rješen. Tadašnji natjecatelji često su spominjali kako su ga rješili pomoću nejednakosti. Rješenje koje je dalo povjerenstvo možemo slobodno nazvati umjetnim i rijetko koji učenik bi ga se sjetio. Ovo rješenje možda ima izravniji pristup, ali zahtijeva visoko znanje matematike (posebno nejednakosti).

Rješenje. Svima je odmah jasno da je rješenje $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2004} = 1$, samo nije jasno kako to dokazati. Mi ćemo to dokazati pomoću **nejednakosti među sredinama**. Za ovaj slučaj koristit ćemo da vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leq \sqrt[3]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3}{n}} \leq \sqrt[4]{\frac{a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4}{n}},$$

za pozitivne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdje se sredine redom zovu aritmetička, kvadratna, kubna, kvartalna. Jednakost se postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Mi ćemo promatrati slučaj kada je $n = 2004$ i $a_i = |x_i|$, za $i = 1, 2, \ldots, 2004$.

Iz nejednakosti između kvartalne i kubne sredine slijedi

$$\sqrt[3]{\frac{|x_1|^3 + |x_2|^3 + \cdots + |x_{2004}|^3}{2004}} \leq \sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4}{2004}}, \quad (*)$$

a iz nejednakosti između kvartalne i aritmetičke sredine dobivamo

$$\frac{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{2004}|}{2004} \leq \sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4}{2004}}. \quad (**)$$

Primjenom nejednakosti trokuta $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{2004}| \geq |x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004}| = 1$ i kubiranjem $(**)$ dobivamo nejednakosti

$$(*) \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4}{2004}}$$

$$(**) \quad \Rightarrow \quad \frac{|x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3|}{2004} \leq \left(\sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4}{2004}}\right)^3$$

Množenjem zadnjih nejednakosti dobivamo

$$\frac{|x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3|}{2004} \leq \frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4}{2004}.$$

Za svaki realni broj x vrijedi $x \leq |x|$ pa iz posljednje nejednakosti slijedi

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3 \leq x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4.$$

U posljednjoj nejednakosti vrijedi jednakost ako i samo ako u $(*)$, $(**)$ i nejednakosti trokuta vrijedi jednakost. Što se postiže za $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n|$ i za brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ istog predznaka. Jednakost vrijedi ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2004} = 1$. ✓

Napomena. Broj 2004 možemo zamijeniti bilo kojim prirodnim brojem n.

Zanimljivo je da se ovaj zadatak pojavio na (završnoj) matematičkoj olimpijadi u Ukrajini 1998. godine.