Slučaj hlađenja trupla – *rješenje*

Rješenje koristi neke matematičke alate koji nisu poznati širem čitateljstvu, pa ih pozivamo da krenu od formule (2) *kao gotove ako ne razumiju prvi dio rješenja.*

Za: Inspektora Vancea McFrita

Od: Članova kluba f^4

Predmet: Računanje vremena smrti lorda Boddyja

Predstavljamo našu procjenu vremena smrti lorda Boddyja, koji je umro u noći s 23. na 24. lipanj, $20xy$, od posljedica teškog udarca u zatiljak mjedenim svijećnjakom. Budući da samo jedan sumnjivac nije imao alibi, možemo zaključiti tko je ubojica.

Optužujemo profesora Prunea za ubojstvo lorda Boddyja u radnoj sobi u otprilike 23:28, 23. lipnja $20xy$.

S T označimo temperaturu radne sobe. (Sve ćemo temperature mjeriti u stupnjevima Celzija.) Prema svjedočenju Scherlocka Marplesa i zbog mjera poduzetih da radna soba ostane prazna za vrijeme istrage, možemo pretpostaviti da je T ostala konstantna tijekom cijele istrage.

S t označimo broj sati koji su prošli od vremena umorstva. S a označimo broj sati od vremena umorstva do 1:30. Sa $C(t)$ označimo temperaturu trupla t sati nakon vremena umorstva. S $y(t)$ označimo razliku u temperaturi između trupla i radne sobe. Tada je

$$y(t) = C(t) - T.$$

Budući da je radna soba relativno hladna, očito je $y(t) \geq 0$ tijekom cijele istrage.

Jedna verzija *Newtonovog zakona hlađenja* kaže da je brzina promjene temperature tijela koje se hladi izravno proporcionalna razlici između tijela i okoline (ako okolina ima konstantnu temperaturu). Dakle:

$$C'(t) = k \cdot y(t),$$

gdje je k konstanta koja ovisi o fizičkim proporcijama tijela koje se hladi (veličina, oblik, specifični toplinski kapacitet, itd.). Sada

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left[C(t) - T\right] = C'(t) - \frac{dT}{dt} = C'(t) - 0 = C'(t),$$

budući da je T konstanta, $\frac{dT}{dt} = 0$. Zato je $y'(t) = k \cdot y(t)$ s rješenjem

$$y(t) = y(0) \cdot e^{kt},$$

dakle $C(t) - T = y(t)$, odnosno

$$C(t) = y(0) \cdot e^{kt} + T. \qquad (1)$$

To je temperatura trupla t sati nakon umorstva.

Tjelesna temperatura lorda Boddyja (dok je bio živ) bila je 37° C pa znamo da je $C(0) = 37$.

$$37 = C(0) = y(0) \cdot e^0 + T = y(0) + T \Rightarrow y(0) = 37 - T,$$

stoga (1) postaje

$$y(t) = T + (37 - T) \cdot e^{kt}. \qquad (2)$$

U 1:30 ($t = a$) znamo da je temperatura trupla bila 32° C.

$$C(a) = 32 \qquad (3)$$

U 2:30 imamo $t = a + 1$ i $C(t) = 30$.

$$C(a + 1) = 30 \qquad (4)$$

U 3:30 imamo $t = a + 2$ i $C(t) = 28.25$.

$$C(a + 2) = 28.25 \qquad (5)$$

Kombinirajući (3), (4) i (5) s (2), dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} 32 &= T + (37 - T) \cdot e^{ka} && (6) \\ 30 &= T + (37 - T) \cdot e^{k(a+1)} && (7) \\ 28.25 &= T + (37 - T) \cdot e^{k(a+2)} && (8) \end{aligned}$$

Rješavanjem (6) po e^{ka} dobijemo:

$$e^{ka} = \frac{32 - T}{37 - T}. \qquad (9)$$

Sada možemo (7) napisati kao:

$$\frac{30 - T}{37 - T} = e^{k(a+1)} = e^{ka} \cdot e^k = \frac{32 - T}{37 - T} \cdot e^k,$$

te dobijemo

$$e^k = \frac{30 - T}{32 - T}. \qquad (10)$$

Iz (9) i (10) i (8) slijedi:

$$\begin{aligned} 28.25 &= T + (37 - T) \cdot e^{k(a+2)} \\ &= T + (37 - T) \cdot e^{ka} \cdot \left(e^k\right)^2 \\ &= T + (37 - T) \cdot \frac{32 - T}{37 - T} \cdot \left(\frac{30 - T}{32 - T}\right)^2 \\ &= T + \frac{(30 - T)^2}{32 - T} \end{aligned}$$

pa je

$$(28.25 - T)(32 - T) = (30 - T)^2.$$

Dalje se lako dobije $T = 16$. Kad to uvrstimo u (10), dobijemo:

$$e^k = \frac{30 - 16}{32 - 16} = \frac{7}{8}.$$

Uvrstimo to u (9):

$$\frac{32 - 16}{37 - 16} = e^{ka} = \left(e^k\right)^a = \left(\frac{7}{8}\right)^a \Rightarrow a = \frac{\ln\left(\frac{16}{21}\right)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)} \approx 2.036.$$

Sada, $0.036 \cdot 60 \approx 2$ pa je $a \approx 2$ sata i 2 minute, stoga je 1:30 otprilike 2 sata i 2 minute nakon vremena umorstva, iz čega slijedi da se umorstvo dogodilo u 23:28. Budući da je profesor Prune jedini osumnjičeni bez alibija u to vrijeme, on je, očito, ubojica.

Prevela i prilagodila: Tia Tomiša