



Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 12

<http://e.math.hr/>

Afine transformacije ravnine

Harun Šiljak

Sadržaj:

[1. Uvod](#)

[2. Primjeri riješenih zadataka](#)

[3. Zadaci za samostalan rad](#)

[Literatura](#)

1. Uvod

Većinu problema iz područja euklidske geometrije moguće je riješiti upotrebom tzv. sintetičkih metoda. Međutim, ponekad traženje tog "elementarnog" rješenja predstavlja teškoću i vrsnim poznavateljima geometrije, tako da su se stoljećima razvijale različite nesintetičke metode (analitička geometrija, kompleksni brojevi u geometriji, vektori), koje su olakšale rješavanje mnogih problema u ovom području. Afine transformacije nalaze se negdje između sintetičkih i nesintetičkih metoda: ne pretvaraju geometrijski problem u algebarski (kao što to čine analitičke metode), ali su neodvojivo povezane s vektorima, vektorskim prostorima i koordinatnim sustavima. U ovom tekstu pokušat ćemo sustavno iznijeti teoriju afinih transformacija u ravnini, prilagođenu srednjoškolskom nivou, te kroz niz ilustrativnih primjera pokazati njihovu primjenu pri rješavanju različitih geometrijskih problema.

Transformaciju ravnine nazivamo **afinom** ako predstavlja neprekidnu bijekciju koja svaki pravac preslikava u pravac.

Spomenimo još i da se svaka afina transformacija ravnine može predstaviti u obliku

$$(x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f)$$

za neke realne konstante a, b, c, d, e, f (zbog bijektivnosti potreban je i uvjet $ad - bc \neq 0$). Obično se transformacija prikazuje u formi matrice:

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Više o matricnim transformacijama ravnine možete saznati iz članka [\[BJ\]](#).

Sva izometrijska preslikavanja su afine transformacije. To je npr. očito za najpoznatije predstavnike izometrijskih preslikavanja: translaciju, rotaciju, osnu i centralnu simetriju. Sljedećih pet teorema predstavlja teorijske osnove afinih transformacija. Napomenimo još i to da su teoremi 2, 4 i 5 osnovno "oružje" u primjeni ove metode u planimetriji, što ćete u nastavku i vidjeti na primjerima.

Na ovome mjestu bilo bi korisno ponoviti osnovne činjenice o vektorskom prostoru V^2 , tj. o vektorskoj ravnini. Njezini elementi su vektori - klase međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Orijetirane dužine AB i CD su *ekvivalentne* (tj. predstavljaju isti vektor) ako dužine \overline{AD} i \overline{BC} imaju isto polovište. Poznato je da iz svake točke ravnine možemo "nanijeti" bilo koji vektor. Vektore zbrajamo prema "pravilu trokuta": $AB + BC = AC$. Za više informacija o vektorskoj algebri i teoriji vektorskih prostora, pogledajte [\[MM\]](#).

Afina transformacija ravnine L na prirodan način prenosi se i na vektore: $L(AB) = L(A)L(B)$. Pokažimo najprije da je ova definicija dobra, tj. da ne ovisi o izboru predstavnika vektora.

Lema 1. Neka su A_1, B_1, C_1, D_1 slike točaka A, B, C, D , redom, preslikanih afinom transformacijom L . Ako je $AB = CD$, tada je $A_1B_1 = C_1D_1$.

Dokaz. Neka je $AB = CD$. U slučaju da točke A, B, C i D nisu kolinearne, $ABCD$ je paralelogram. Kako se paralelni pravci preslikavaju u paralelne pravce (što ćemo dokazati u teoremu 2(c)), tako je i $A_1B_1C_1D_1$ također paralelogram, pa je $A_1B_1 = C_1D_1$. Ako su točke A, B, C, D kolinearne, uzmimo točke E i F koje nisu kolinearne s njima tako da je $EF = AB$. Tada je $A_1B_1 = E_1F_1 = C_1D_1$. \square

Teorem 1. Ako je L afina transformacija, tada vrijedi

- (a) $L(0) = 0$,
- (b) $L(a + b) = L(a) + L(b)$ za proizvoljne vektore a, b iz V^2 ,
- (c) $L(ka) = kL(a)$ za proizvoljan vektor a i realan broj k .

Dokaz. (a) $L(0) = L(AA) = L(A)L(A) = 0$.

(b) Neka je $a = AB$ i $b = BC$. Koristeći se definicijama zbrajanja vektora i djelovanja afine transformacije na vektore dobivamo $L(AB + BC) = L(AC) = L(A)L(C) = L(A)L(B) + L(B)L(C) = L(AB) + L(BC)$.

(c) Uzmimo prvo da je k cijeli broj. Tada za prirodni k vrijedi $L(ka) = L(a + \dots + a) = L(a) + \dots + L(a) = kL(a)$, a za negativni k dovoljno je u prethodnom izrazu iskoristiti $ka = (-k)(-a)$. Sada, neka je $k = \frac{m}{n}$ racionalan broj; $nL(ka) = L(nka) = L(ma) = mL(a)$, pa je $L(ka) = (\frac{m}{n})L(a) = kL(a)$.

Konačno, ako je k iracionalan broj, postoji niz k_n racionalnih brojeva koji teže ka k (npr. niz decimalnih aproksimacija broja k). Budući da je L neprekidna funkcija, $L(k a) = L(\lim_{n \rightarrow \infty} k_n a) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n L(a) = k L(a)$. \square

Teorem 2. Afine transformacije čuvaju:

- (a) kolinearnost točaka,
- (b) konkurentnost pravaca,
- (c) paralelnost pravaca,
- (d) omjer dužina na pravcu,
- (e) omjer površina poligona.

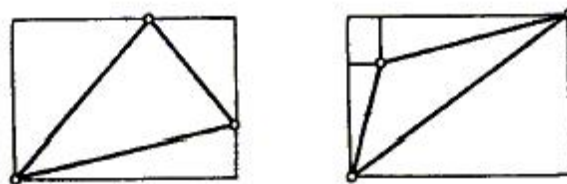
Dokaz. (a) Slijedi direktno iz činjenice da se afinom transformacijom pravac preslikava u pravac.

(b) Slijedi iz činjenice da se pravac preslikava u pravac i da je u pitanju bijekcija, jer se tada slika točke presjeka pravaca koji se preslikavaju nalazi u presjeku preslika svakog od tih pravaca.

(c) Analogno dokazu (b), iz činjenice preslikavanja pravca u pravac i bijektivnosti, slike pravaca koje se ne sijeku, također se ne sijeku.

(d) Neka je L afina transformacija i neka točka C dijeli dužinu \overline{AB} u omjeru $p : q$. Pokažimo da tada i C' dijeli dužinu $\overline{A'B'}$ u istom omjeru, pri čemu je $L(A) = A'$, $L(B) = B'$ i $L(C) = C'$. Zbog teorema 1, iz uvjeta $q AC = p CB$ slijedi $q A'C' = q L(AC) = L(q AC) = L(p CB) = p L(CB) = p C'B'$.

(e) Neka su a_1 i a_2 dva okomita pravca. Budući da afina transformacija čuva omjer duljina na paralelnim pravcima, duljine svih dužina paralelnih s jednim pravcem množe se istim koeficijentom. Označimo s k_1 i k_2 ove koeficijente za pravce a_1 i a_2 i neka je ψ kut između preslika ovih pravaca. Pokažimo da dana afina transformacija množi površine svih poligona s k , gdje je $k = k_1 k_2 \sin \psi$. Za pravokutnike stranica paralelnih s a_1 i a_2 i za pravokutni trokut kateta paralelnih s a_1 i a_2 tvrdnja očito vrijedi. Bilo koji drugi trokut može se dobiti isijecanjem nekoliko takvih pravokutnih trokuta iz pravokutnika stranica paralelnih s a_1 i a_2 (slika 1). Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki trokut, pa samim time i za svaki poligon (jer je svaki poligon moguće nepresijecajućim dijagonalama podijeliti na trokute). \square



Slika 1.

Na ovome mjestu valja primijetiti da afine transformacije općenito ne čuvaju udaljenost među točkama, niti kutove. To se jednostavno pokazuje na primjeru transformacije istezanja, definirane kao $(x, y) \rightarrow (cx, y)$ za realnu konstantu $c \neq 0$. Ovim ograničenjima umnogome su određeni i tipovi problema u kojima se učinkovito mogu primijeniti afine transformacije. Tako je zbog teorema 2 vidljivo da su ove transformacije iznimno korisne pri radu s omjerima, kako

dužinskim, tako i površinskim (što će se vidjeti na primjerima), te s konkurentnim i paralelnim pravcima. S druge strane, zbog svojih ograničenja, afine transformacije iznimno su nepraktične u problemima u kojima se javljaju duljine dužina (bez omjera) i kutovi, pa samim time i normale, konciklične točke i slično.

Teorem 3. Neka su zadane dvije točke u ravnini, O i O' , i dvije baze vektorskog prostora V^2 , $\{e_1, e_2\}$ i $\{e'_1, e'_2\}$. Tada postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava O u O' i $\{e_1, e_2\}$ u $\{e'_1, e'_2\}$.

Dokaz. Definirajmo preslikavanje L na sljedeći način. Neka je X proizvoljna točka. Budući da je $\{e_1, e_2\}$ baza vektorskog prostora, postoje jedinstveni brojevi x_1 i x_2 takvi da je $OX = x_1e_1 + x_2e_2$. Pridružimo točki X točku $X' = L(X)$ takvu da je $O'X' = x_1e'_1 + x_2e'_2$. Budući da je $\{e'_1, e'_2\}$ također baza, konstruirano preslikavanje je bijekcija (inverzno preslikavanje da se konstruirati na sličan način), a pokazuje se i da je neprekidno. Dokažimo sada da je slika bilo kojeg pravca AB po preslikavanju L također pravac. Neka je $A' = L(A)$, $B' = L(B)$ i neka su (a_1, a_2) i (b_1, b_2) koordinate točaka A i B , redom, u bazi $\{e_1, e_2\}$ (tj. $OA = a_1e_1 + a_2e_2$, $OB = b_1e_1 + b_2e_2$). Uzmimo proizvoljnu točku C na pravcu AB . Budući da vrijedi $AC = kAB$ za neki k , onda je $OC = OA + AC = OA + kAB = OA + k(OB - OA) = (1 - k)OA + kOB = ((1 - k)a_1 + kb_1)e_1 + ((1 - k)a_2 + kb_2)e_2$. Prema definiciji preslikavanja L , za sliku $C' = L(C)$ vrijedi $O'C' = ((1 - k)a_1 + kb_1)e'_1 + ((1 - k)a_2 + kb_2)e'_2 = (1 - k)O'A' + kO'B' = O'A' + k(O'B' - O'A') = (1 - k)O'A' + kA'B'$ pa točka C' leži na pravcu $A'B'$. Jedinstvenost preslikavanja L slijedi iz teorema 1. Zaista, $L(OX) = x_1L(e_1) + x_2L(e_2)$, dakle, slika točke X jednoznačno je određena slikama vektora e_1 i e_2 i slikom točke O . \square

Teorem 4. Za dana dva trokuta ABC i $A_1B_1C_1$ postoji jedinstvena afina transformacija koja jedan preslikava u drugi.

Dokaz. Dovoljno je u teoremu 3 uzeti $O = A$, $e_1 = AB$, $e_2 = AC$, $O' = A_1$, $e'_1 = A_1B_1$, $e'_2 = A_1C_1$. \square

Iz teorema 4 i teorema 2(c) slijedi

Teorem 5. Za dana dva paralelograma postoji jedinstvena afina transformacija koja jedan preslikava u drugi.

2. Primjeri riješenih zadataka

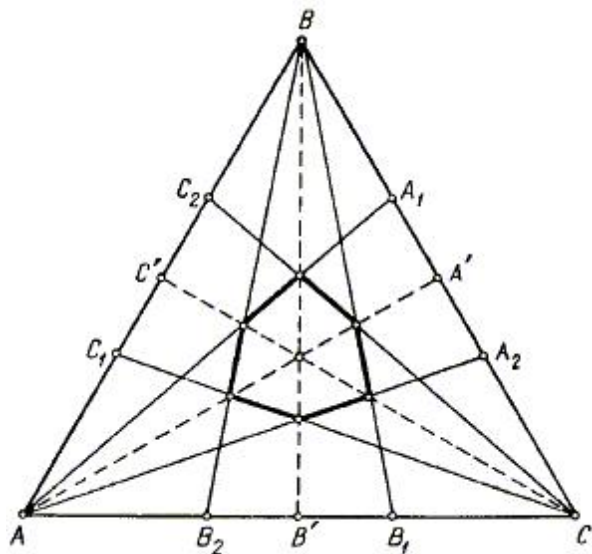
Zahvaljujući teoremima 4 i 5, često pri rješavanju problema u proizvoljnom trokutu možemo problem svesti na dokazivanje tvrdnje u jednakokraničnom trokutu, što je često mnogo lakše. Slično, paralelogram je moguće (po potrebi) transformirati u kvadrat. Ponekad je, pak, praktičnije trokut zamijeniti jednakokračnim trokutom, što ćemo vidjeti na nekim od primjera koji slijede. Naravno, pri svakoj od transformacija mora se paziti na zakonitosti iz teorema 2 i ograničenja vezana za kutove i dužine.

Na sljedećih nekoliko primjera vidjet ćemo iz prve ruke afine transformacije "na djelu". Bit će tu i relativno lakih i teških problema (tu je i jedan prijedlog za IMO). Zadaci su izabrani tako da pokažu standardnu metodu rješavanja planimetrijskih problema uz pomoć afinih transformacija i omogućće zainteresiranom

čitatelju da riješi probleme za samostalan rad na kraju članka, te da lako prepozna mogućnost primjene afinih transformacija u problemima s kojima će se u budućnosti susretati (na natjecanjima, u nastavi ili istraživačkom radu).

Primjer 1. ([IJ]) Po dva pravca povučena su kroz svaki vrh trokuta tako da suprotnu stranicu dijele na tri jednaka dijela. Dokažite da se dijagonale koje spajaju suprotne vrhove šesterokuta nastalog u presjeku ovih pravaca sijeku u jednoj točki.

Rješenje. U zadatku su očito "u igri" samo omjeri na pravcima i konkurentnost, osobine koje afina transformacija čuva (prema teoremu 2). U skladu s teoremom 4, možemo dani trokut transformirati u jednakostranični i u njemu dokazati tvrdnju zadatka. Neka točke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ dijele stranice jednakostraničnog trokuta ABC na jednake dijelove i neka su A', B', C' središta stranica (slika 2). Kako su pravci BB_1 i CC_2 , te BB_2 i CC_1 simetrični u odnosu na pravac AA' , a simetrični pravci sijeku se na osi simetrije, tako se jedna dijagonala promatranog šesterokuta nalazi na AA' . Slično, preostale dijagonale nalaze se na BB' i CC' . Jasno je, dalje, da se težišnice $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ sijeku u jednoj točki, čime je tvrdnja dokazana.



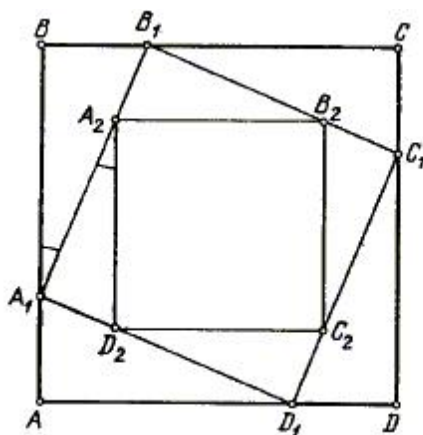
Slika 2.

Primjer 2. ([VP]) Na stranicama AB, BC, CD, DA paralelograma $ABCD$ izabrane su redom točke A_1, B_1, C_1, D_1 , a na stranicama $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ četverokuta $A_1B_1C_1D_1$ izabrane su redom točke A_2, B_2, C_2, D_2 tako da vrijedi

$$\frac{|AA_1|}{|BA_1|} = \frac{|BB_1|}{|CB_1|} = \frac{|CC_1|}{|DC_1|} = \frac{|DD_1|}{|AD_1|} = \frac{|A_1D_2|}{|D_1D_2|} = \frac{|D_1C_2|}{|C_1C_2|} = \frac{|C_1B_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|}.$$

Dokažite da je $A_2B_2C_2D_2$ paralelogram čije su stranice paralelne sa stranicama paralelograma $ABCD$.

Rješenje. Prema teoremu 5, svaki paralelogram može se afinom transformacijom transformirati u kvadrat. Dovoljno je trokut ABC transformirati u jednakokračni pravokutni trokut i paralelogram $ABCD$ postaje kvadrat. Budući da su osnovni elementi u problemu omjeri dužina na pravcu i paralelni pravci, ovdje možemo primijeniti afine transformacije i uzeti u daljnjem razmatranju da je $ABCD$ kvadrat.



Slika 3.

Razmotrimo rotaciju za kut od 90° oko središta kvadrata $ABCD$ koji ga preslikava u samog sebe. Ovom rotacijom se i četverokuti $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$ preslikavaju sami u sebe. Prema tome, i oni su kvadrati (pokažite to!) pa vrijedi $|AA_1| = |BB_1|$, $|B_1A_2| = |A_1D_2|$ i dovoljno je dokazati da je npr. $AB \parallel A_2D_2$. Imamo:

$$\operatorname{tg} \angle BA_1B_1 = \frac{|BB_1|}{|BA_1|} = \frac{|AA_1|}{|BA_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_1D_2|}{|A_1A_2|} = \operatorname{tg} \angle A_1A_2D_2.$$

Iz toga slijedi $AB \parallel A_2D_2$, što smo i htjeli pokazati.

Primjer 3. ([VP]) U trapezu $ABCD$ osnovica AB i CD , kroz točku D povučen je pravac paralelan s krakom BC , koji siječe dijagonalu AC u točki P . Pravac paralelan s krakom AD , povučen kroz točku C , siječe dijagonalu BD u točki Q . Dokažite da je pravac PQ paralelan s osnovicama trapeza $ABCD$.

Rješenje. Neka je E sjecište dijagonala trapeza. Afina transformacija koja trokut ADE preslikava u jednakokračni trokut preslikava trapez $ABCD$ u jednakokračni trapez $A'B'C'D'$. Tada su točke P' i Q' simetrične u odnosu na simetralu dužine $A'B'$, pa je $P'Q' \parallel A'B'$.

Primjer 4. ([IJ]) Neka je točka T težište trokuta ABC i neka su M, N, P točke na stranicama AB, BC, CA trokuta, koje dijele ove stranice u istom omjeru ($|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = |CP| : |PA| = p : q$). Dokažite:

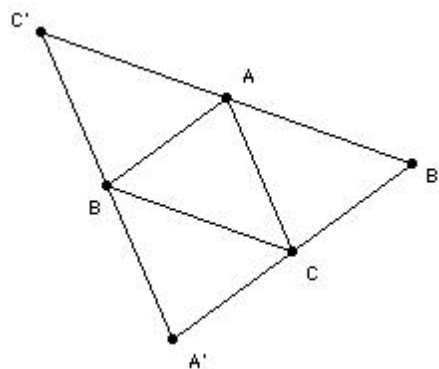
- (a) T je težište trokuta MNP ,
- (b) T je težište trokuta čiji su vrhovi u presjeku pravaca AN , BP i CM .

Rješenje. (a) Afinom transformacijom preslikajmo trokut ABC u jednakostranični trokut $A'B'C'$. Neka su T' , M' , N' , P' slike točaka T , M , N , P . Rotacijom za kut od 120° oko točke T' trokut $M'N'P'$ preslikava se u samog sebe. Prema tome, to je jednakostranični trokut, a T' mu je težište, odnosno sjecište težišnica. Budući da se afinom transformacijom težišnica preslikava u težišnicu, T je težište trokuta MNP .

(b) Na isti način zaključujemo da je T i težište trokuta nastalog u presjeku pravaca AN , BP i CM .

Primjer 5. ([JS]) Za svaki skup S od pet točaka u ravnini, od kojih tri nisu kolinearne s $M(S)$ i $m(S)$, označene su najveća i najmanja površina trokuta određenih točkama iz S . Koja je najmanja moguća vrijednost omjera $M(S)/m(S)$?

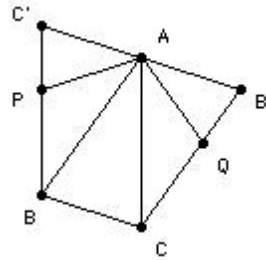
Rješenje. Dokažimo da je najmanji mogući omjer $(1+\sqrt{5})/2$ i da se on postiže ako se S sastoji od vrhova pravilnog peterokuta. Označimo s A , B , C , D i E točke skupa S i neka je $P(\triangle ABC) = M(S)$. Neka je $k = 2M(S)/(1 + \sqrt{5})$. Sada trebamo pokazati da barem jedan od trokuta formiranih od točaka iz skupa S ima površinu manju ili jednaku k . Povucimo pravce $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ kroz A , B , C paralelne s BC , CA , AB (slika 4).



Slika 4.

Točka D mora se nalaziti na istoj strani pravca $B'C'$ kao i BC , inače bi vrijedilo $P(\triangle BCD) > P(\triangle ABC)$, što se protivi činjenici da je $P(\triangle ABC)$ maksimalna. Slično, D se nalazi s iste strane $C'A'$ kao i CA , te s iste strane $A'B'$ kao i AB . Prema tome, D se nalazi ili unutar $\triangle ABC$, ili na jednoj od njegovih stranica. Slično zaključujemo i za točku E . Budući da su trokuti $A'BC$, $B'CA$, $C'BA$ disjunktne (izuzimajući točke A , B i C , u kojima se točke D i E ne mogu naći), u jednom od njih se ne nalaze ni D , ni E . Bez umanjenja općenitosti, uzmimo da se točke D i E nalaze u četverokutu $B'CBC'$.

Afine transformacije čuvaju omjer površina trokuta; zato možemo transformirati $\triangle ABC$ u trokut kutova 36° , 72° , 72° , što će nam omogućiti da odaberemo točke P i Q , tako da je $APBCQ$ pravilan peterokut. Budući da je $AB \parallel CQ$ i $AB \parallel A'B'$, točka Q nalazi se na pravcu $B'C$. Analogno, P se nalazi na BC' .



Slika 5.

Sada razmotrimo dva slučaja, ovisno nalaze li se točke D i E unutar ili izvan peterokuta $APBCQ$.

1. Točka D nalazi se u peterokutu. Ako se nalazi u $\triangle ABP$, tada je $P(\triangle ABD) \leq P(\triangle ABP) = k$. Slično vrijedi i ako se D nalazi u $\triangle ACQ$. Ako se, pak, nalazi u $\triangle ABC$, tada je površina bar jednog od trokuta $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle CAD$ manja ili jednaka od $P(\triangle ABC)/3 < k$. Slično zaključujemo i za točku E .
2. Točke D i E nalaze se u $\triangle APC'$ ili $\triangle AQB'$. Ako se obje nalaze u istom trokutu, tada je $P(\triangle ADE) \leq P(\triangle APC') < k$. Ako se nalaze u različitim trokutima, naprimjer D u $\triangle APC'$ i E u $\triangle AQB'$, tada je $P(\triangle ADE) = (|AD| \cdot |AE|/2) \sin \angle DAE \leq (|AP|^2/2) \sin \angle PAQ = P(\triangle PAQ) = k$.

Analizom navedenih primjera mogli ste vidjeti uobičajene ideje, metode i tehnike vezane za rad s afinim transformacijama, ali i primjere nestandardnih ideja koje zahtijevaju određenu dozu imaginacije i kreativnosti. Ideje iz ovih primjera pokušajte iskoristiti u zadacima za samostalan rad koji se nalaze na kraju teksta. Neki od njih daju se riješiti standardnim putem, no neki će zahtijevati nove ideje. Neka vas ne obeshrabri početni neuspjeh u nekima od zadataka. Pokušajte opet, gledajte, razmišljajte, analizirajte!

3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1. ([VP]) Na stranicama AB , BC i CD paralelograma $ABCD$ izabrane su točke K , L i M , tako da dijele stranice u istom omjeru. Neka su b , c i d pravci koji prolaze točkama B , C i D i paralelni su s KL , KM , ML . Dokažite da se pravci b , c i d sijeku u jednoj točki.

Zadatak 2. ([VP]) Na stranicama AB , BC i AC trokuta ABC nalaze se točke M , N i P . Dokažite:

(a) Ako su točke M_1 , N_1 i P_1 centralno simetrične točkama M , N i P u odnosu na središta odgovarajućih stranica, tada je $P(\triangle MNP) = P(\triangle M_1N_1P_1)$

(b) Ako se točke M_1 , N_1 i P_1 nalaze na stranicama AC , BA i CB , tako da je $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$, $PP_1 \parallel AB$, tada je $P(\triangle MNP) = P(\triangle M_1N_1P_1)$.

Zadatak 3. ([KK]) Neka su X , Y , Z točke na stranicama BC , CA , AB , trokuta ABC za koje vrijedi $|BX|/|XC| = |CY|/|YA| = |AZ|/|ZB| = k$, za zadanu konstantu $k > 1$. Pronađite odnos površina trokuta čiji se vrhovi nalaze u presjeku dužine AX , BY i CZ i trokuta ABC (kao funkciju od k).

Zadatak 4. ([ML], Albanija 2004.) Odrediti omjer površine osmerokuta koji se nalazi u presjeku pravaca povučenih iz vrhova paralelograma do središta suprotnih stranica s površinom tog paralelograma.

Zadatak 5. ([MR], Švedska 1996.) Kroz točku u unutrašnjosti trokuta površine T povučeni su pravci paralelni sa stranicama trokuta, koji ga dijele na tri trokuta i tri paralelograma. Neka su T_1, T_2, T_3 površine dobivenih trokuta. Dokažite da je $\sqrt{T} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3}$.

Zadatak 6. ([DJ], prijedlog za IMO 1995.) Neka je O točka u unutrašnjosti konveksnog četverokuta $ABCD$, čija je površina S i neka su K, L, M i N točke na stranicama AB, BC, CD i DA . Ako su $OKBL$ i $OMDN$ paralelogrami, dokažite da je $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, gdje su S_1 i S_2 površine četverokuta $ONAK$ i $OLCM$.

Sljedeći zadatak naveden je pogrešno u [KK] i [MR]. Ovdje je dan ispravljen tekst.

Zadatak 7. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut i neka je $F = BC \cap DE, G = CD \cap EA, H = DE \cap AB, I = EA \cap BC, J = AB \cap DC$. Ako je $P(\triangle AHI) = P(\triangle BIJ) = P(\triangle CJF) = P(\triangle DFG) = P(\triangle EGH)$, dokažite da se pravci AF, BG, CH, DI, EJ sijeku u jednoj točki.

Literatura

[BJ] T. Bedeković, B. Jandras i D. Žubrinić, *Matrične transformacije ravnine*, Math.e 1 (2004). <http://e.math.hr/linal>

[DJ] D. Djukić, V. Janković, I. Matić i N. Petrović, *The IMO compendium*, Springer, 2006.

[IJ] I.M. Jaglom, *Geometričeskie preobrazovanija II*, Moskva, 1956.

[KK] K.S. Kedlaya, *Geometry unbound*, 2006. <http://www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/>

[MM] D.S. Mitrinović, D. Mihailović i P.M. Vasić, *Linearna algebra – Polinomi – Analitička geometrija*, Beograd, 1973.

[ML] MathLinks Forum. <http://www.mathlinks.ro>

[VP] V.V. Prasolov, *Problems in plane geometry* (prijevod: D. Leites), 2005. <http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf>

[MR] M. Radovanović, *Afine transformacije*, 2007. http://www.matf.bg.ac.yu/~matic/competitions/dodatne/afine_mr.pdf

[JS] J. Scholes, *43rd IMO Shortlist*, 2002. <http://www.kalva.demon.co.uk/short/soln/sh02g5.html>

[1. Uvod](#)

[2. Primjeri riješenih zadataka](#)

[3. Zadaci za samostalan rad](#)

[Literatura](#)