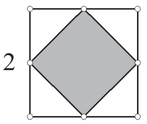
Matka 25 (2016./2017.) br. 99

# EUKLID I KVADRATNE PLOČICE

Renata Svedrec, Zagreb

Zaslužni građani Matkograda za postignute uspjehe u kulturi, sportu i javnome životu nagrađuju se plaketama. Ove je godine zlatar Zlatić dobio posao izrade zlatnih plaketa Grada, pri čemu plakete trebaju biti kvadratnog oblika. Za treću nagradu treba izraditi zlatnu plaketu površine 2 cm$^2$, za drugu nagradu zlatnu plaketu površine 3 cm$^2$, a za prvu nagradu zlatnu plaketu površine 5 cm$^2$. Kolike će biti duljine stranica plaketa koje Zlatić treba izraditi?

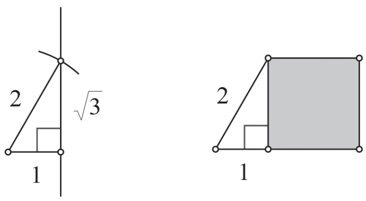



*Slika 1.*

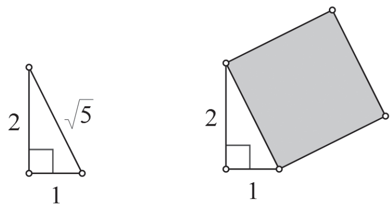
Najmanju je plaketu kreirao bez većeg problema, a i bez računanja duljine stranice traženog kvadrata. Napravio je model kvadrata sa stranicama dugim 2 cm, dakle model kvadrata površine 4 cm$^2$. Spojio je redom polovišta njegovih susjednih stranica – i model plakete površine 2 cm$^2$ bio je gotov (v. sliku 1.)! Lako je vidjeti (a starijim Matkačima i dokazati) da sivi i bijeli dio većeg kvadrata imaju jednake površine.

Sav sretan, ponadao se da će jednako lako riješiti i druga dva problema. Ali, ti problemi nisu bili tako jednostavno rješivi. Majstor Zlatić shvatio je da ne zna napraviti ni kvadrate čije su površine dvostruko veće od površina traženih kvadrata. Morao je potražiti drugi način rješavanja problema.


Srećom, Zlatić je u školi bio dobar matematičar i zato je lako izračunao duljine stranica kvadrata koje je trebao napraviti. Duljine stranica traženih kvadrata bile su redom $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm i $\sqrt{5}$ cm. Prisjetio se Pitagorina poučka i uočio da je u pravokutnom trokutu s hipotenuzom duljine 2 cm i jednom katetom duljine 1 cm duljina druge katete jednaka $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ cm. Slično, u pravokutnom trokutu s katetama duljine 1 cm i 2 cm duljina hipotenuze jednaka je $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ cm. Pravokutne trokute sa stranicama tražene duljine znao je konstruirati, pa je uspješno napravio tražene plakete (v. slike 2. i 3.).




*Slika 2.*




*Slika 3.*

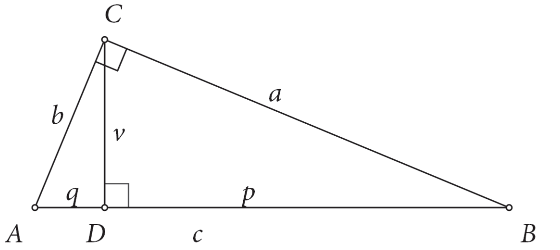
Dobitnik prve nagrade, profesor Mazalić, poželio je svoju učionicu ukrasiti uvećanom „kopijom” svoje plakete tako da njezina površina bude točno



Matka 99.indd 160 3.2.2017. 16:01:58

30 cm². Naslikao bi je sam, ali nije se mogao sjetiti kako „namjestiti” željenu veličinu! I on je znao primijeniti postupak koji je koristio zlatar pa je u glavi „vrtio” kvadrate prirodnih brojeva, zbrajao ih i oduzimao... Zaključio je da zna napraviti kvadrate površine 29 cm² i 32 cm², ali ne i onaj od 30 cm². Na kraju je otišao potražiti pomoć kolege Matkovića. Profesor Matković je, kao i uvijek, rado pomogao u rješavanju problema.

Nacrtao je pravokutni trokut *ABC*, s pravim kutom u vrhu *C*, i okomicu iz vrha *C* na hipotenuzu $\overline{AB}$ (v. sliku 4.), pri čemu je nožište visine na hipotenuzu označio s *D*.




*Slika 4.*

Mazalić je na slici uočio tri pravokutna trokuta: $\Delta ABC$, $\Delta ACD$ i $\Delta CBD$ i zaključio da izgledaju slično. Profesor Matković je nastavio: „U pravu si. Ne samo da *izgledaju slično*, oni su zaista slični!” Uz oznake kao na slici vrijedi:

a) pravokutni trokuti $\Delta ABC$ i $\Delta ACD$ međusobno su slični.

b) pravokutni trokuti $\Delta ABC$ i $\Delta CBD$ međusobno su slični.

c) pravokutni trokuti $\Delta ACD$ i $\Delta CBD$ međusobno su slični.

Iz prve sličnosti vrijedi $|AB| : |AC| = |AC| : |AD|$, tj. uz oznake kao na slici,

$$b^2 = c \cdot q.$$

Iz druge sličnosti vrijedi $|AB| : |CB| = |BC| : |BD|$, tj. uz oznake kao na slici,

$$a^2 = c \cdot p.$$

Zbrojimo li ove dvije jednakosti, dobit ćemo da je $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q)$, tj. zbog $p + q = c$ vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. To je dobro poznata simbolima zapisana tvrdnja Pitagorina poučka.

Iz treće sličnosti vrijedi $|AD| : |CD| = |CD| : |BD|$, tj. uz oznake kao na slici,

$$v^2 = p \cdot q.$$

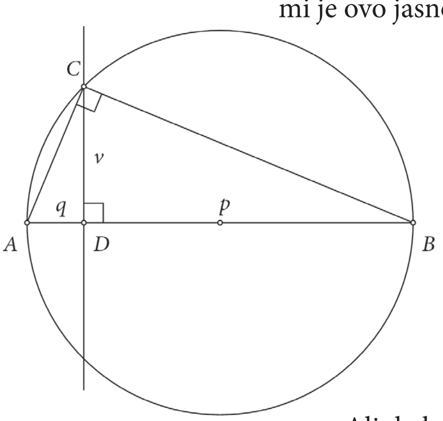
Ova je tvrdnja u matematici poznata i kao **Euklidov poučak**:

Neka je točka *D* nožište visine na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta *ABC*.

Kvadrat duljine visine $\overline{CD}$ na hipotenuzu $\overline{AB}$ jednak je umnošku duljina dobivenih dijelova hipotenuze, $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$. Uz oznake kao na slici 4. vrijedi:

$$v^2 = p \cdot q, \text{ odnosno } v = \sqrt{p \cdot q}.$$

Profesor Mazalić potvrdno je kimao glavom, ali se usudio primijetiti: „Sve mi je ovo jasno, ali kako mi to pomaže u ostvarenju moje ideje?"



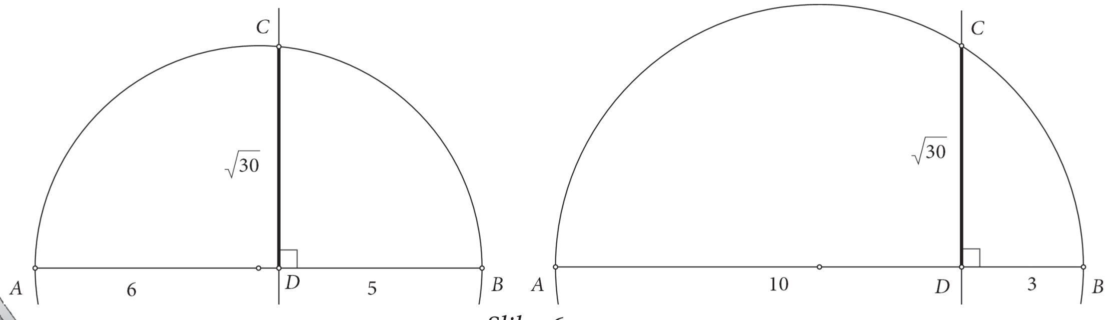

Matković se nije dao smesti. „Pogledaj sliku! Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ čija je duljina jednaka $p + q$, pa na toj dužini označi točku *D* tako da je $|AD| = q$. Zatim konstruiraj kružnicu kojoj je ta dužina promjer i – rješenje je vrlo blizu! Prema Talesovu poučku svaka točka te kružnice vrh je pravoga kuta nekog pravokutnog trokuta s hipotenuzom $\overline{AB}$. Okomica na promjer nacrtane kružnice u točki *D* siječe kružnicu u toči *C*, pri čemu je kut *ACD* pravi, a duljina dužine $\overline{CD}$ jednaka $v = \sqrt{p \cdot q}$. Dakle, $\overline{CD}$ je stranica kvadrata koji trebaš konstruirati."

„Ali, kako ću znati koliki su *p* i *q*? I kolika je duljina dužine $\overline{AB}$?" pitao je Mazalić.

„Ovisi o duljini dužine koju želiš konstruirati!" odgovori Matković. „Ako želiš dobiti kvadrat površine 30 cm², broj 30 napiši u obliku umnoška dvaju prirodnih brojeva. To su traženi brojevi *p* i *q*. Duljina promjera kružnice (dužine $\overline{AB}$) jednaka je zbroju $p + q$."

„Ali broj 30 mogu napisati u obliku umnoška na više različitih načina! Broj 30 mogu napisati kao $1 \cdot 30$, ali i kao $2 \cdot 15$, $3 \cdot 10$ te $5 \cdot 6$. Koji od tih načina moram ili smijem koristiti?" mučilo je Mazalića.

„Svejedno je!" reče Matković. „Crtat ćeš kružnice različitih promjera, ali konačni će rezultat biti isti! Pokušaj nacrtati."




*Slika 6.*

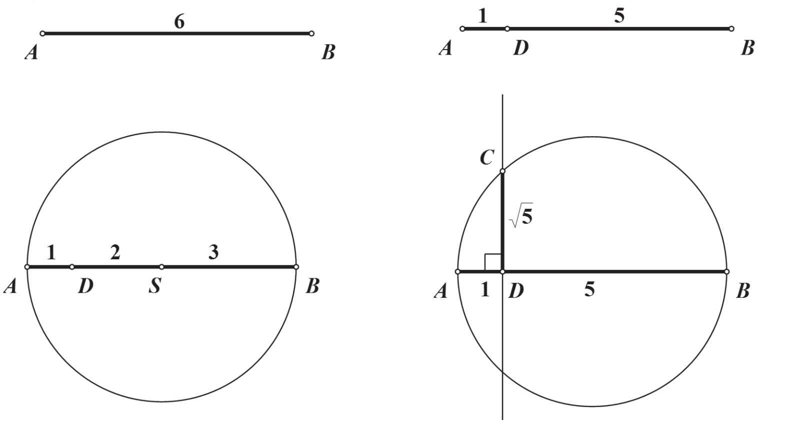


Matka 99.indd 162 3.2.2017. 16:01:58

Mazalić se odmah bacio na posao i kopiju svog priznanja nacrtao na dva načina.

Ovakav je postupak moguć u svim slučajevima i često ubrzava postupak konstrukcije dužine zadane duljine.

**1.** Opišite postupak konstrukcije dužine čija je duljina jednaka $\sqrt{5}$ cm (prikazan na slici 7.):




*Slika 7.*

**2.** Primijenite opisani postupak i konstruirajte dužine čije su duljine:

a) $\sqrt{6}$ cm, b) $\sqrt{7}$ cm, c) $\sqrt{10}$ cm, d) $\sqrt{20}$ cm.

Je li način konstrukcije za svaku od tih dužina jedinstven?