Matka 25 (2016./2017.) br. 99

CRTICE IZ SVIJETA MATEMATIKE

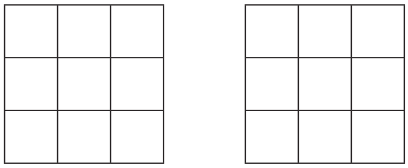
Franka Miriam Brückler, Zagreb

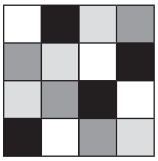
Prije drugog nastavka ove nove rubrike, evo odgovora na zadatke iz prvog nastavka. Prvi je zadatak bio razlomak $\frac{8}{13}$ zapisati na egipatski način; to je primjerice $\frac{8}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{234}$. Riječ „primjerice" vezana je uz odgovor na drugo pitanje, a ono glasi je li takav zapis jedistven: Nije! Svaki se razlomak može na više, štoviše beskonačno mnogo načina zapisati kao zbroj jediničnih razlomaka. Prvo, može se pokazati da se stvarno svaki pozitivan razlomak može zapisati u egipatskom obliku na bar jedan način. Sad, ako odaberemo jedan od članova toga zapisa i njegovim nazivnikom podijelimo izraz $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ te dobiveno uvrstimo na mjesto odabranog člana, dobit ćemo novi egipatski zapis istog razlomka, a to očito možemo ponoviti koliko god puta želimo. Recimo, ako uzmemo naš zapis $\frac{8}{13}$ i odaberemo drugi član gornjeg zapisa, $\frac{1}{9}$, dijeljenjem $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ s 9 dobivamo $\frac{1}{9}=\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}$, dakle je $\frac{8}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}+\frac{1}{234}$. Idemo sad na nešto novo i potpuno drugačije...

Latinski kvadrati

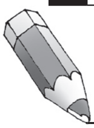
Jesi li kad rješavao sudoku-križaljku? Čak i ako nisi, vjerujem da znaš osnovna pravila: popunjavaš polja tako da u svakom stupcu i svakom retku (i dodatno, u svakom 3 × 3 podkvadratu) budu svi brojevi od 1 do 9, svaki po jednom. Ako malo bolje razmisliš, umjesto brojeva 1 do 9 mogao bi koristiti i bilo kojih devet različitih simbola ili boja, zagonetka ne bi bila ništa teža niti lakša. Dok su sudoku-zagonetke stare manje od 40 godina, sama ideja tablica u kojima se svaki od danih simbola pojavljuje u svakom retku i stupcu ni manje ni više nego jednom – dosta je starija.

Jedan od najvećih matematičara svih vremena, Švicarac Leonhard Euler, u 18. se stoljeću bavio takvim rasporedima i dao im naziv *latinski kvadrati* jer je za njihovo popunjavanje koristio slova latinske abecede. U tom duhu, evo prvog zadatka za tebe: Na bar dva različita načina unesi slova A, B i C u 3 × 3 tablice tako da se svako od slova pojavljuje u svakom retku i svakom stupcu po jedan put.





Ako umjesto slova koristimo boje ili uzorke, dobit ćemo vizualno atraktivnije latinske kvadrate. Evo primjera 4 × 4 latinskog kvadrata (slika na rubu):



Uzmi bojice i napravi što veći šareni latinski kvadrat!

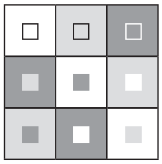
Od ovih „običnih” latinskih kvadrata zanimljiviji su, a i korisniji, oni koji se nazivaju grčko-latinskim kvadratima. Da dobiješ osjećaj što su oni, uzmi uobičajeni „špil” karata i iz njega asa, dečka, damu i kralja u sve četiri „boje” (karo, srce, pik, tref). Složi tih 16 karata na stol tako da u svakom retku i stupcu budu po četiri karte i da se pritom u svakom stupcu točno po jednom pojavljuje svaka „boja” i svaki tip karte. To što dobiješ (jedno rješenje dat ćemo u sljedećem nastavku) je grčko-latinski kvadrat veličine 4 × 4.

Dakle, u grčko-latinskim kvadratima kao da imamo preklopljena dva latinska kvadrata. U našem primjeru jedan je načinjen od „boja” karata, a drugi od tipova karata. Dodatno, nikoja kombinacija (nikoja karta) ne pojavljuje se dvaput u tablici. Naziv grčko-latinski kvadrat također potječe od Eulera jer je on koristio kombinacije od po jednog latinskog i jednog grčkog slova umjesto, kao mi u zadatku, kombinacije tipova i „boja” karata.

Grčko-latinski kvadrati koriste se u planiranju nekih eksperimenata ili rasporeda. Primjerice, želimo li da dva tročlana tima (tim 1: Marko, Nena, Oliver; tim 2: Petra, Robert, Sanja) u tri dana (ponedjeljak, utorak i srijedu) održe sastanke tako da se svatko iz jednoga tima sastane sa svakim iz drugoga tima po jedan put i da nitko nema dva sastanka u jednome danu, te da pritom rasprave o tri teme (jelo, kazalište, lutrija), opet prema istom principu (svatko po jednom raspravlja o svakoj temi i nitko ne raspravlja o istoj temi dvaput), možemo raspored dobiti iz grčko-latinskog kvadrata veličine 3 × 3. Uzmimo, recimo, sljedeći grčko-latinski kvadrat sastavljen iz kombinacija latinskih slova P, U, S i grčkih slova ι, κ, λ (čitaj: jota, kapa, lambda): (slika na rubu). Uoči: Gledaš li samo slova P, U, S, ona čine latinski kvadrat, a isto vrijedi i ako gledamo samo slova ι, κ, λ. Uz to, svaka kombinacija latinskog i grčkog slova pojavljuje se točno po jednom u tablici – stvarno imamo grčko-latinski kvadrat. Ako sad uzmemo da slova P, U, S znače „ponedjeljak, utorak, srijeda”, a slova ι, κ, λ znače „jelo, kazalište, lutrija” te dodatno zamislimo da retci predstavljaju osobe prvog tima (prvi red Marko, drugi Nena, treći Oliver), a stupci osobe drugog tima (prvi Petra, drugi Robert, treći Sanja), lako očitamo raspored. Primjerice, u ponedjeljak (P) će o lutriji (λ) raspravljati Nena (drugi red) i Robert (drugi stupac). Što je dobro na ovom rasporedu? O svakoj su temi pričale osobe iz oba tima, i to čak po triput različite, ali bez nepotrebnog dupliciranja.

P ι	U κ	S λ
S κ	P λ	U ι
U λ	S ι	P κ

Grčko-latinski kvadrati poprimaju posebno atraktivan izgled ako se koriste boje. Recimo, svako polje tablice možemo podijeliti na dva dijela tako da unesemo manji prazni kvadrat. U tom slučaju svako polje ima kvadrat i rub. Ako pazimo da se boje rubova po stupcima i retcima ne ponavljaju, a isto tako boje unutrašnjih kvadrata, te da se u tablici svaka kombinacija boja kvadrat-rub pojavi samo po jednom, dobili smo šareni grčko-latinski kvadrat. Ovdje dajemo primjer 3 × 3 grčko-latinskog kvadrata u tri boje (usporedi ga s prethodnim i odredi prema kojem smo principu ovaj dobili iz njega!): (slika na rubu).



Napravi sam svoj veći višebojni grčko-latinski kvadrat, a ako imaš umjetničkih sklonosti, osmisli i vlastitu podjelu polja na dva dijela. Oprez: dok latinski kvadrati postoje u svim veličinama, grčko-latinski ne postoje u veličinama 2 × 2 i 6 × 6!