Matka 25 (2016./2017.) br. 99

MATEMAGIČAR

ⰏⰀⰕⰅⰏⰀⰃⰉⰝⰀⰓ

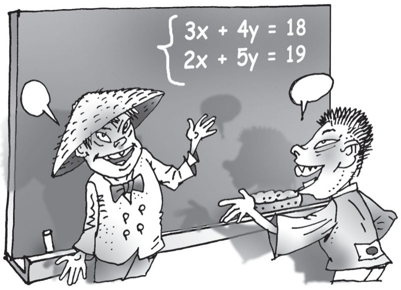
Petar Mladinić, Zagreb

KINESKA I JAPANSKA METODA: ZAČETAK DETERMINANTI

Za računanje raznih numeričkih problema, Kinezi su rabili bambusove štapiće. Rješavali su sustav linearnih jednadžbi koje su nazivali *simultanim jednadžbama*. U tekstu *Aritmetika u sedam lekcija* opisali su postupak kojim su rješavali problem sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}.$$

Algoritam je upućivao na sljedeće korake:



– napišite koeficijente $\begin{matrix} a & a' \\ b & b', \end{matrix}$

– pomnožite ih (u križ!) $ab' \quad a'b$,

– zbrojite $ab' + a'b$

i

$b + b'$,

– rezultat je $\dfrac{ab' + a'b}{a - a'}$

i

$\dfrac{b + b'}{a - a'}$.

Nepoznato je kako su došli do ovakvog zaključivanja, ali je vjerojatno da su u ovakvom računanju pomoću bambusovih štapića prezentirali koeficijente.

Ovakvo zaključivanje nije bilo točno, ali je očito upućivalo da se do rješenja može doći „manipuliranjem” koeficijentima jednadžbi. Tu je ideju 1683. godine razradio japanski matematičar **Seki Kowa** (1642. – 1708.) tako da je svojom metodom točno rješavao sustave dviju linearnih jednadžbi. On je nadogradio kinesku metodu početne uporabe tabličnog zapisivanja koeficijenata.

U srži kineske i japanske metode leži ideja da se sustavi linearnih jednadžbi mogu rješavati tablicama u kojima se zapišu koeficijenti tih jednadžbi i određenim postupcima tj. računanjem dobije rješenje. Danas se ta ideja zrcali u rješavanju sustava linearnih jednadžbi pomoću determinanti.

Ilustrirajmo tu ideju rješavanjem nekoliko primjera.

Determinante

Primjer 1 . *Riješimo sustav dviju linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases}.$$

Rješenje. Zapišimo koeficijente uz nepoznanicu x i y u tablicu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ova se tablica naziva determinantom 2. reda. Izračunajmo umnožak $3 \cdot 5$ elemenata na jednoj dijagonali i $4 \cdot 2$ na drugoj. Njihova je razlika $15 - 8 = 7$. Dakle, determinanta sustava jednaka je $D = 7$.

Izračunajmo deteminantu nepoznanice x. U već napisanoj determinanti sustava zamijenimo prvi stupac brojevima „slobodnog" stupca i dobivamo

$$D_x = \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix}.$$

Vrijednost determinante D_x dobivamo na isti način kao u slučaju determinante D:

$$D_x = 18 \cdot 5 - 4 \cdot 19 = 90 - 76 = 14.$$

U trećem koraku izračunamo determinantu D_y nepoznanice y koju dobijemo ako zamijenimo drugi stupac u determinanti D brojevima slobodnog stupca:

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}.$$

Vrijednost determinante D_y jednaka je

$$D_y = 3 \cdot 195 - 18 \cdot 2 = 57 - 36 = 21.$$

Vrijednost nepoznanica dobiva se kao omjer ovih determinanti, tj.

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}.$$

U našem je primjeru $x = 2$ i $y = 3$.

Primjer 2. *Riješimo sustav dviju linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}.$$

Rješenje. Iz prethodnog primjera vidimo da trebamo izračunati D, D_x i D_y. Također uočavamo da treba biti $D \neq 0$. (Zašto?)

Nepoznanice x i y dobivaju se iz

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

tj. vrijedi

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Za vježbu riješite sljedeće zadatke.

1. Riješite sustav dviju jednadžbi $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases}$.

2. Nađite sve vrijednosti parametra a za koji sustav $\begin{cases} 3x + 7y = 20 \\ ax + 14y = 15 \end{cases}$ ima jedinstveno rješenje.

3. Nađite sve vrijednosti parametra a za koji sustav $\begin{cases} ax - 8y = 12 \\ 2x - 6y = 15 \end{cases}$ nema rješenje.

4. Nađite sve vrijednosti parametra a za koji sustav $\begin{cases} 15x + ay = 3 \\ 5x + 10y = 1 \end{cases}$ ima beskonačno rješenja.