KOMBINATORIKA STOTINU „MATKI“

Željko Brčić, Vinkovci

Stotinu brojeva Matke iznimno je vrijedna obljetnica. Vrijednost časopisa za razvoj mladih matematičara prepoznata je u mnogim hrvatskim školama. U jednoj takvoj osnovnoj školi priređen je program posvećen stotom broju popularnog matematičkog lista.

Za sve zainteresirane učenike održano je predavanje pod naslovom „Kombinatorika stotinu Matki” u kojem su zorno, uz pomoć uvodnih teorijskih objašnjenja i odgovarajućih primjera, objašnjeni načini rješavanja kombinatornih zadataka na osnovnoškolskoj razini. Priređena je i izložba do sada objavljenih brojeva Matke. Učenici su mogli pogledati naslovnice i zadatke u stripu sa zadnje stranice te prelistati neke brojeve časopisa. Omogućena je i kupnja starih brojeva Matke po pristupačnim cijenama i još neke druge aktivnosti.

Posebno je bio zanimljiv nagradni natječaj u kojem su učenici osmišljavali kombinatorne matematičke zadatke vezane uz temu skupa: obilježavanje stotog broja njihova omiljenog lista. Neki drugi učenici zatim su se natjecali u rješavanju tih zadataka. U nastavku teksta navedeni su najzanimljiviji učenički zadatci, kao i njihova rješenja.

Zadatak 1. Sudionike skupa kratko će pozdraviti predstavnici škole-domaćina, grada, županije i Hrvatskog matematičkog društva. Na koliko se načina može sastaviti protokol otvaranja, uzimajući u obzir sve moguće poretke govornika?

Rješenje: Na skupu će biti četiri govornika. Prvog govornika možemo izabrati na 4 načina (to može biti bilo tko od navedenih), drugog na 3 načina (bilo koja osoba koja nije već izabrana za prvog govornika), trećeg na 2 načina (jedan od dvojice koji nisu odabrani za prvog ili drugog govornika) i četvrtog na samo 1 način (zadnji koji preostane). Ukupan broj poredaka govornika dobijemo množenjem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Postoje 24 različita poretka govornika na skupu.

Zadatak 2. Na otvorenju skupa nastupili su članovi školskog zbora obučeni u majice triju boja. Dva su člana zbora imala plave majice, osam ih je nastupilo u žutima, a ostalih 6 u zelenim majicama. Na koliko se načina članovi zbora mogu poredati na pozornici, uzevši u obzir samo boje njihovih majica?

Rješenje: Školski zbor ima 16 članova. Ako bismo željeli izračunati ukupan broj rasporeda svih učenika na pozornici, analogno kao u prošlom zadatku, pomnožili bismo $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dobili bismo prilično velik broj: 20 922 789 888 000. No, broj mogućih rasporeda na pozornici koji se u zadatku traži bit će manji od toga broja jer nije važan raspored pojedinih učenika, nego samo boja njihovih majica.

Za dva učenika u plavim majicama to izgleda ovako: Poredak u kojemu je jedan od njih, primjerice, na prvome mjestu, a drugi na drugome, isti je kao i kad spomenuti učenici zamijene mjesta. Budući da to vrijedi za bilo koji smještaj te dvojice učenika, u ranije izračunatom broju zapravo je dvostruko više položaja od stvarnog, pa izračunati broj treba dijeliti s 2. Zbog osam učenika u žutim majicama dobiveni broj treba podijeliti i brojem rasporeda tih 8 učenika na nekih osam fiksiranih mjesta. Primjerice, ako su ti učenici u žutim majicama na prvih osam mjesta, to smatramo samo jednim rasporedom, a izračunati broj sadrži sve moguće promjene mjesta tih učenika. Prema istome obrascu kao i ranije moguće je izraziti broj rasporeda osam učenika kao $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$. Analogno, zbog 6 učenika u zelenim majicama trebamo ranije izračunati broj podijeliti i sa $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Nakon ta tri dijeljenja dobije se da 16 učenika u majicama triju boja može na pozornici biti u 360 360 različitih položaja.

Zadatak 3. Na glavnom panou priređena je izložba deset izabranih naslovnica Matke. Na koliko su načina naslovnice mogle biti posložene ako su organizatori izložbe imali na raspolaganju svih sto do sada objavljenih Matki?

Rješenje: Zadatak se rješava slično kao i prvi, uz napomenu da ne raspoređujemo sve Matke, nego samo njih deset. Prva se može izabrati na 100 načina, druga na 99, treća na 98, ... , a zadnja, deseta Matka može se izabrati na 91 način. Ukupan broj različitih izbora deset Matki od stotinu mogućih je $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 92 \cdot 91 = 62\,815\,650\,955\,529\,472\,000$.

Zadatak 4. Najbolji od učenika sastavljača zadataka za nagradu će dobiti pet primjeraka Matke. Na koliko se načina može odabrati nagrada ako je na raspolaganju deset različitih brojeva časopisa?

Rješenje: Za razliku od prošlog zadatka u kojemu su se izabrane naslovnice mogle izložiti u svim mogućim poredcima, ovdje poredak izabranih Matki nije bitan. Prvu Matku možemo izabrati na deset načina, drugu na devet, a petu na šest načina. Množenjem $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ dobije se broj svih mogućih poredaka izabranih Matki. Za bilo koji izbor jedne petorke u tom su broju uračunati svi njihovi poredci. Pet Matki može se posložiti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina, pa je traženi broj mogućih izbora $30\,240 : 120 = 252$. Točno pet od 10 ponuđenih primjeraka časopisa može se izabrati na 252 načina.

Zadatak 5. Iz svakoga od četiri razreda (od 5. do 8.) za pomoć pri organizaciji skupa izabrana su po tri učenika. Na koliko načina oni mogu između sebe izabrati grupu od pet dežurnih učenika ako u njoj moraju biti predstavnici svih razreda?

Rješenje: Ako iz svakog razreda izaberemo po jednog učenika, preostat će još jedno slobodno mjesto koje može popuniti predstavnik bilo kojega razreda. Dakle, iz jednog će razreda biti dvojica učenika, a iz svih ostalih po jedan. Budući da se dva predstavnika od tri učenika mogu izabrati na tri načina (AB, AC ili BC), a jedan predstavnik od tri učenika također na tri načina, broj mogućih izbora učenika iz sva četiri razreda je $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Na kraju to još treba pomnožiti s 4 jer se razred koji daje dva predstavnika može izabrati na četiri načina. Konačan broj mogućih izbora učenika je 324.

Zadatak 6. Nakon natjecanja u rješavanju zadataka pet najuspješnijih učenika dobilo je nagrade i pri tome su međusobno čestitali jedan drugome stiskom ruke. Svim učenicima čestitala su i dva učitelja koja su im uručivala nagrade. Koliko je ukupno bilo rukovanja?

Rješenje: Svaki od 5 učenika rukovao se s preostalom četvoricom i to samo jednom. Stoga je broj rukovanja među učenicima $5 \cdot 4 : 2 = 10$. Svaki od dvojice učitelja čestitao je svakome od 5 učenika, pa je to još $2 \cdot 5 = 10$ rukovanja. Ukupno je bilo 20 rukovanja.

Zadatak 7. Na zidu prostorije u kojoj je organizirana svečanost otvorenja ima 8 prozora. Na koliko različitih načina možemo otvoriti te prozore ako ne želimo da svi prozori budu istodobno otvoreni, ali niti istodobno zatvoreni?

Rješenje: Svaki od 8 prozora može imati dva stanja: otvoren i zatvoren. Stoga je broj mogućih stanja svih 8 prozora $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$. Budući da samo dva stanja nisu poželjna (svi otvoreni i svi zatvoreni), broj je mogućih rasporeda prozora 254.

Zadatak 8. Među učiteljima predloženima za Organizacijski odbor skupa je 7 žena i 5 muškaraca. Na koliko se načina može izabrati peteročlani odbor ako u njemu trebaju biti 3 žene i 2 muškarca?

Rješenje: Od 7 žena biramo tri. Prvu možemo izabrati na 7 načina, drugu na 6, a treću na 5. To je ukupno $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ izbora u kojemu je bitan raspored izabranih osoba. Kako redoslijed izbora nije bitan, 210 treba podijeliti brojem rasporeda triju osoba, a to je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Ženski dio odbora može se izabrati na $210 : 6 = 35$ načina. Analogno se računa i muški izbor. Tu će biti $(5 \cdot 4) : (2 \cdot 1) = 10$. Konačno, ukupan broj načina na koje možemo izabrati traženi peteročlani odbor je $35 \cdot 10 = 350$.

Zadatak 9. U jednome redu s 10 sjedala nalazi se pet dječaka i pet djevojčica koji sjede naizmjenično. Na koliko se načina oni mogu razmjestiti, ali tako da opet osobe istoga spola ne sjede jedna do druge?

Rješenje: Pet dječaka može proizvoljno izmijenjati svoje položaje, ali samo na sjedalima na kojima su već bili dječaci. To mogu napraviti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina. Također postoji 120 načina na koje se mogu razmjestiti djevojčice na svojih pet sjedalica. Postoji $120 \cdot 120 = 14\,400$ zajedničkih rasporeda dječaka i djevojčica. Ukupan broj mogućih rasporeda dvostruko je veći jer se svi dječaci mogu zamijeniti sa svim djevojčicama. I u tom će slučaju osobe istoga spola biti razdvojene, a broj mogućih razmještaja također je 14 400. Dječaci i djevojčice mogu se razmjestiti na 28 800 načina.

Napomena: Sve navedene zadatke srednjoškolci mogu riješiti na drugi način, pomoću permutacija, kombinacija i varijacija (sa i bez ponavljanja), koristeći poznate formule za izračunavanje njihova broja. O svemu tome osnovnoškolci će tek učiti.