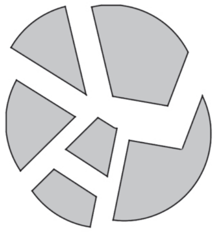
KVADRATURA KRUGA

Alija Muminagić i Jens Carstensen, Frederiksberg (Danska)

Većina ljudi i dan-danas pri spominjanju kvadrature kruga pomisli na težak ili nerješiv problem. Ali, ta ista većina ne može formulirati taj problem i ne zna od kada i odakle on potječe.

Problem kvadrature kruga jedan je od najpoznatijih problema antičke geometrije.[1] Mnogi su se poznati (i nepoznati) matematičari stoljećima bavili rješavanjem ovoga problema:

Uz pomoć ravnala i šestara treba konstruirati kvadrat čija je površina jednaka površini danog kruga.



Pokušajmo problem riješiti algebarski. Neka je zadan krug polumjera r. Površina toga kruga jednaka je $r^2\pi$. Budući da je $r^2\pi = \left(\sqrt{2r\pi \cdot \frac{r}{2}}\right)^2$, zaključujemo da traženi kvadrat (s površinom jednakom površini zadanog kruga) ima stranicu čija je duljina $a = \sqrt{2r\pi \cdot \frac{r}{2}}$. Dakle, stranicu a traženog kvadrata možemo konstruirati kao geometrijsku sredinu između $2r\pi$ i $\frac{r}{2}$. Za $r = 1$, problem kvadrature kruga svodi se na konstrukciju dužine čija je duljina 2π.

Međutim, krajem 19. stoljeća (1882. godine), Ferdinand Lindemann[2] dokazao je da je broj π transcendentan broj, čime je dokazao da je kvadratura kruga pomoću ravnala i šestara nerješiv problem. Lindermannovim dokazom da je π transcendentan broj dokazana je nemogućnost te konstrukcije, no pronađeno je mnogo približnih (i dosta „točnih") konstrukcija. Dvije od takvih približnih konstrukcija opisane su u nastavku članka.

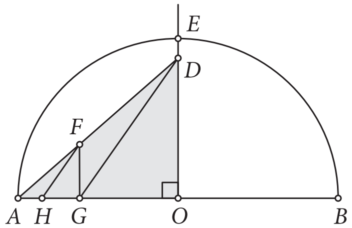
Konstrukcija Jacoba de Geldera

Vrlo dobru približnu vrijednost broja π daje razlomak $\frac{355}{113} = 3.1415929...$ Zapravo, od svih razlomaka čiji su brojnik i nazivnik manji od 3000, taj razlomak daje najbolju približnu vrijednost.[3] Konstrukciju približne vrijednosti broja π kao $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$ dao je Jacob de Gelder[4] 1849. godine.

[1] Antičko doba (antika) je razdoblje od 700. do 476. godine prije Krista, zapravo doba stare grčke i rimske civilizacije
[2] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852. – 1939.), njemački matematičar
[3] U literaturi nalazimo da su u 5. st. Tsu Ch'ung-Chih i njegov sin Tsu Keng-Chih našli da je $3.1415926 < \pi < 3.1415927$
[4] Jacob de Gelder (1765. – 1848.), nizozemski matematičar

Evo kako je on to napravio:

1. Nacrtao je polukružnicu sa središtem u točki O s polumjerom $r = 1$ (promjer te kružnice je $\overline{AB}$).
2. U točki O konstruirao je okomicu na promjer, a sjecište te okomice s polukružnicom označio E.
3. Na dužini $\overline{OE}$ konstruirao je točku D tako da je $|OD| = \frac{7}{8}$.
4. Spojio je točke A i D, pa na dužini $\overline{AD}$ odredio točku F tako da je $|AF| = \frac{1}{2}$.
5. Točkom F konstruirao je paralelu s pravcem OE (sjecište s promjerom je točka G), a zatim paralelu s pravcem DG (sjecište s promjerom je točka H), vidi Sliku 1.



Slika 1.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ΔADO dobivamo da vrijedi

$$|AD|^2 = |AO|^2 + |OD|^2 = 1^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1 + \frac{47}{64} = \frac{113}{64}.$$

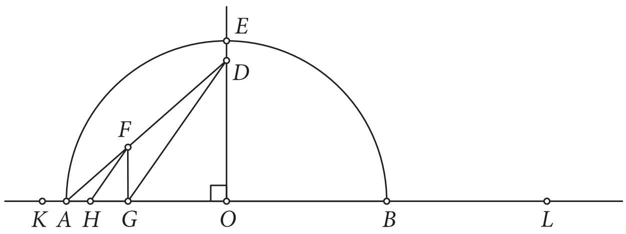
Iz sličnosti trokuta ΔAFG i ΔADO slijedi $|AF| : |AD| = |AG| : |AO|$, odnosno

$$|AG| = \frac{|AF| \cdot |AO|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\sqrt{\frac{113}{64}}} = \frac{4}{\sqrt{113}}.$$

Nadalje, iz sličnosti trokuta ΔAHF i ΔAGD slijedi $|AH| : |AG| = |AF| : |AD|$, odnosno

$$|AH| = \frac{|AG| \cdot |AF|}{|AD|} = \frac{\frac{4}{\sqrt{113}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{113}}{8}} = \frac{16}{113}.$$

Produljimo promjer $\overline{AB}$ preko točaka A i B pa na pravcu AB označimo točke K i L tako da vrijedi $|KA| = |AH|$ i $|BL| = |OB|$, vidi Sliku 2.



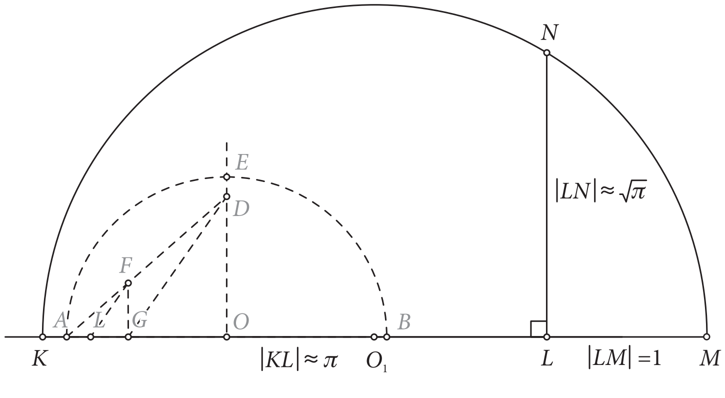
Slika 2.

Uočite na slici 2. dužinu $\overline{KL}$. Njezina je duljina jednaka:

$$|KL| = |KA| + |AO| + |OB| + |BL| = |AH| + |AO| + |OB| + |OB| =$$
$$= \frac{16}{113} + 1 + 1 + 1 = 3 + \frac{16}{113} \approx \pi.$$

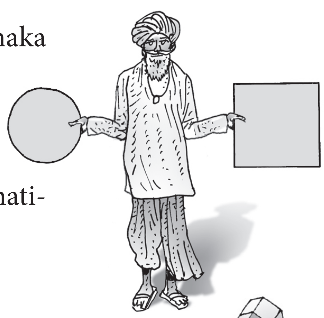
Na pravcu *KL* označimo točku *M* tako da je $|LM| = 1$ i konstruiramo polukružnicu nad dužinom $\overline{KM}$ kao promjerom. Okomica točkom *L* na promjer $\overline{KM}$ siječe konstruiranu polukružnicu u točki *N*, vidi Sliku 3. Tada je, prema Euklidovu poučku[5],

$$|LN|^2 = |KL| \cdot |LM|, \text{ tj.}$$
$$|LN| = \sqrt{|KL| \cdot |LM|} \approx \sqrt{\pi \cdot 1} = \sqrt{\pi}\,.$$



Slika 3.

Dakle, za $r = 1$, duljina stranice traženog kvadrata trebala bi biti jednaka $a = \sqrt{\pi}$, a konstrukcijom smo dobili dužinu približno te duljine.

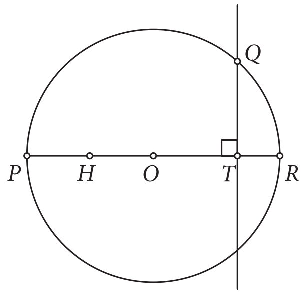


Konstrukcija Srinivase Ramanujana

Evo kako je problem kvadrature kruga riješio poznati indijski matematičar Ramanujan[6].

[5]Pročitajte članak *Euklid i kvadratne pločice* u Matki broj 99

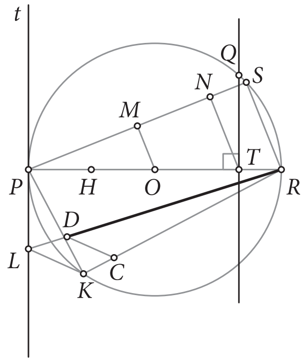
[6]Srinivasa Ramanujan (1887. – 1920.), indijski matematičar



Slika 4.

Neka je k dana kružnica sa središtem u točki O i polumjerom $|PO| = |OR| = r$ i neka je točka H polovište dužine $\overline{PO}$, a T točka dužine $\overline{OR}$ takva da je $|TR| = \frac{1}{3}r$. Točkom T konstruiramo okomicu na promjer, a presjek konstruirane okomice i gornje polukružnice označimo Q, vidi Sliku 4.

Nacrtamo tetivu $\overline{RS}$ takvu da je $|RS| = |TQ|$, a zatim i dužinu $\overline{SP}$. (Uočite: prema Talesovom poučku, trokut ΔPRS je pravokutan, s pravim kutom u vrhu S.) Nožišta okomica točkama T i O na dužinu $\overline{SP}$ redom označimo N i M. Na donjoj polukružnici konstruiramo točku K tako da je $|PK| = |PM|$, a zatim i tangentu t dane kružnice s diralištem P, vidi Sliku 5.



Slika 5.

Na tangenti t označimo točku L tako da je $|PL| = |MN|$, a zatim nacrtamo dužine $\overline{RL}$, $\overline{RK}$ i $\overline{LK}$. Na dužini $\overline{RK}$ odredimo točku C tako da je $|RC| = |RH|$, a onda točkom C konstruiramo paralelu s $\overline{LK}$. Sjecište konstruirane paralele s dužinom $\overline{RL}$ je točka D. Dokažimo da je tada $|RD| = r \cdot \sqrt{\pi}$ duljina stranice traženoga kvadrata.

Dokaz: Prema konstrukciji (na temelju Euklidova poučka) zaključujemo da je $|TQ| = \sqrt{|PT| \cdot |TR|}$. Budući da je $|PR| = 2r = d$, onda je $|TR| = \frac{1}{6}d$, $|PT| = d - \frac{1}{6}d = \frac{5}{6}d$ i $|TQ| = \sqrt{\frac{1}{6}d \cdot \frac{5}{6}d} = \frac{\sqrt{5} \cdot d}{6}$. Prema konstrukciji je $|RS| = |TQ|$ i $|\angle PSR| = 90°$, pa na trokut ΔPSR primjenjujemo Pitagorin poučak. Dobivamo: $|PS|^2 = |PR|^2 - |RS|^2 = d^2 - \frac{5d^2}{36} = \frac{31d^2}{36}$. Uočavamo sličnost trokuta ΔPOM, ΔPTN i ΔPRS, odakle slijedi da je $|PM| : |PO| = |PS| : |PR|$, odnosno

$$|PM| = \frac{|PS| \cdot |PO|}{|PR|} = \frac{\frac{\sqrt{31} \cdot d}{6} \cdot \frac{d}{2}}{d} = \frac{\sqrt{31} \cdot d}{12},$$ te $|PN| : |PT| = |PS| : |PR|$, odakle je

$$|PN| = \frac{|PS| \cdot |PT|}{|PR|} = \frac{\frac{\sqrt{31} \cdot d}{6} \cdot \frac{5}{6}d}{d} = \frac{5\sqrt{31} \cdot d}{36}.$$

Dalje je $|MN| = |PN| - |PM| = \frac{5\sqrt{31}d}{36} - \frac{\sqrt{31}d}{12} = \frac{\sqrt{31}d}{18}$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute ΔPKR i ΔPLR, uz uvažavanje uvjeta zadatka ($|PL| = |MN|$ i $|PK| = |PM|$) te ranije dobivenih rezultata, dobivamo:

$$|RK|^2 = |PR|^2 - |PK|^2 = d^2 - \frac{31d^2}{144} = \frac{113d^2}{144} \text{ i } |RL|^2 = |PR|^2 + |PL|^2 = d^2 + \frac{31d^2}{324} = \frac{335d^2}{324}.$$

Zbog sličnosti trokuta ΔRKL i RCD vrijedi $|RK| : |RL| = |RC| : |RD|$, a prema uvjetu zadatka je $|RC| = |RH| = \frac{3}{4}d$. Uvrštavanjem tih podataka dobivamo: $|RK| : |RL| = \frac{\sqrt{113}d}{12} : \frac{\sqrt{355}d}{18} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{113}{355}}$ i $|RC| : |RD| = \frac{3}{4}d : |RD| = \frac{3d}{4 \cdot |RD|}$, odakle slijedi $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{113}{355}} = \frac{3d}{4 \cdot |RD|}$, pa je $4 \cdot |RD| \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{113}{355}} = 3d$, odnosno

$$|RD| = \frac{3d}{6\sqrt{\frac{113}{355}}} = \sqrt{\frac{355}{113}} \cdot \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{355}{113}} \cdot r \approx \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Dužina $\overline{RD}$, čija je duljina jednaka $|RD| = \sqrt{\frac{355}{113}} \cdot r$, predstavlja stranicu kvadrata koji ima površinu jednaku kao zadani krug: $a^2 = |RD|^2 = \frac{335}{113} \cdot r^2$. To, zbog na početku spomenute aproksimacije[7] $\pi \approx \frac{355}{113}$, znači da je $a^2 \approx \pi \cdot r^2$. Za $r = 1$ je $a^2 \approx \pi$, tj. $a \approx \sqrt{\pi}$.

Naravno, kada bi za zadani r bilo moguće konstruirati kvadrat površine $r^2\pi$, onda bi bilo moguće konstruirati i dužinu čija je duljina jednaka opsegu danog kruga. Zaista, iz $r^2\pi = a^2$ nakon množenja s $\frac{2}{r}$ dobivamo $2r\pi = \frac{2a^2}{r}$. To znači da je $2r\pi$ četvrta proporcionala[8] za $2a$, a i r.

Literatura:

1. Jens Carstensen, Alija Muminagić; *Matematiske Perler*, Frederiksberg, 2004.
2. Petr Beckmann; *A history of Pi*, St. Martin's Press, New York, 1971.
3. *Function*, A School Mathematics Journal, Monash University, Vol. 25, February 2001.)

[7]Dakle, i Ramanujan je koristio istu aproksimaciju broja π

[8]O konstrukciji četvrte (geometrijske) proporcionale za zadane tri veličine možete pročitati u članku Ivana Štedula *Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadaća* (dostupan na http://e.math.hr/stedul/index.html).