Matka 25 (2016./2017.) br. 100

SUDOKU I MAGIČNI KVADRATI (ILI – JEDNA ZANIMLJIVOST)

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb

U školi za mlade čarobmatičare vrlo je popularna igra *sudoku*.

Cilj je igre popuniti kvadrat od 9 × 9 mjesta tako da u svakom retku, stupcu i manjem kvadratu 3 × 3 budu sadržani svi brojevi od 1 do 9.

U svakoj igri zadani su početni brojevi koji definiraju jednoznačno rješenje.

Primjer:

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Slika 1.

Vidjevši ih zaokupljene igrom, Baltazar ih je upitao:

– *Možete li načiniti sudoku 9 × 9 tako da bude napravljen od 9 magičnih kvadrata?*

O magičnim kvadratima već je bilo govora u jednoj čarobmatičkoj priči (Matka br. 42, 2002. godine). Prisjetimo se definicije:

Magični kvadrati reda 3 × 3 kvadrati su u koje se upisuju brojevi od 1 do 9 tako da u svakom stupcu, retku i na obje dijagonale zbroj brojeva bude jednak.

Primjer:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Danas se magičnim kvadratima nazivaju kvadrati u kojima su upisani bilo koji prirodni brojevi kojima je zbroj u svakom stupcu, retku i na obje dijagonale jednak, i taj se zbroj zove *magična suma*.

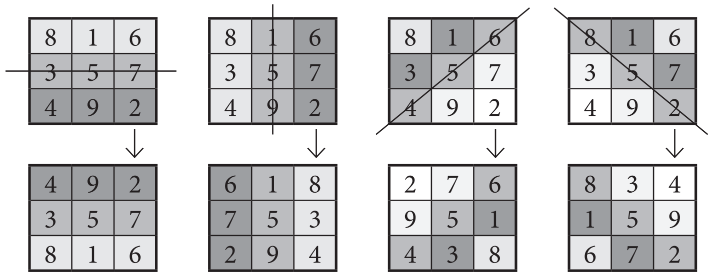
Magična suma kvadrata $n \times n$, ($n = 1, 2, 3..., n^2$) lako se odredi formulom:

$$M = \frac{1}{n}(1+2+3+...+n^2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(1+n^2)}{2} = \frac{n^3+n}{2}.$$

Za kvadrat 3 × 3 magična suma iznosi 15.

Mladi čarobmatičar Svjetlan odmah je rekao da se ne može napraviti sudoku 9×9 od 9 magičnih kvadrata jer u srednjem kvadratiću uvijek mora biti broj 5, pa kada bi se i stavili svi brojevi u rešetku koja čini sudoku, to više ne bi bio pravi sudoku jer bi se petica pojavljivala u nekim stupcima i retcima više puta.

Jer, ako promotrimo skicu kojom se iz početnog magičnog kvadrata 3×3 dobivaju drugi preslikavanjem kao što je simetrija u odnosu na naznačene pravce (slično bi bilo i da smo promatrali rotacije), vidimo da je broj 5 uvijek fiksan, odnosno da ne mijenja svoj položaj preslikavanjem.



Slika 2.

Ako to malo poopćimo i proučimo ovaj magični kvadrat napravljen od 9 uzastopnih prirodnih brojeva, uočavamo da u srednjem kvadratiću mora biti broj p:

$$p - 4, p - 3, p - 2, p - 1, p, p + 1, p + 2, p + 3, p + 4, \quad p \geq 5$$

$p + 3$	$p - 4$	$p + 1$
$p - 2$	p	$p + 2$
$p - 1$	$p + 4$	$p - 3$

Začetnikom sudokua smatra se **Leonhard Euler** koji je prvi sastavio latinski kvadrat 9×9. Godine 1779. izdao je i rad u kojemu se koristi konceptom ortogonalnih latinskih kvadrata na problemu 36 časnika (časnici su izabrani tako da ih se 6 bira iz 6 različitih pukovnija, a svaki od tih 6 mora biti različitog čina; zaključio je da ovaj problem nema rješenja).

Najpoznatiji latinski kvadrat jest upravo sudoku.

Latinski kvadrat od n elemenata je tablica $n \times n$ (ili matrica) takva da se svaki od n elemenata pojavljuje točno jedanput u svakom retku i stupcu. Kako n raste, broj latinskih kvadrata enormno se povećava. Za $n = 4$ njihov je broj 576.

Vrijedi i tvrdnja da je svaki sudoku latinski kvadrat, ali obrat ne vrijedi.

Ali, vratimo se početnom pitanju i odgovoru na to pitanje.

Dakle, ne može se načiniti sudoku 9×9 koji bi bio napravljen od 9 magičnih kvadrata.

Proučite (na Sl. 3.) sljedeće kvadrate 16 ×16, sastavljene od brojeva 0, 1, 2, 3..., 15.

15	2	1	12	9	4	7	10	6	11	8	5	0	13	14	3
4	9	10	7	2	15	12	1	13	0	3	14	11	6	5	8
8	5	6	11	14	3	0	13	1	12	15	2	7	10	9	4
3	14	13	0	5	8	11	6	10	7	4	9	12	1	2	15
9	4	7	10	15	2	1	12	0	13	14	3	6	11	8	5
2	15	12	1	4	9	10	7	11	6	5	8	13	0	3	14
14	3	0	13	8	5	6	11	7	10	9	4	1	12	15	2
5	8	11	6	3	14	13	0	12	1	2	15	10	7	4	9
6	11	8	5	0	13	14	3	15	2	1	12	9	4	7	10
13	0	3	14	11	6	5	8	4	9	10	7	2	15	12	1
1	12	15	2	7	10	9	4	8	5	6	11	14	3	0	13
10	7	4	9	12	1	2	15	3	14	13	0	5	8	11	6
0	13	14	3	6	11	8	5	9	4	7	10	15	2	1	12
11	6	5	8	13	0	3	14	2	15	12	1	4	9	10	7
7	10	9	4	1	12	15	2	14	3	0	13	8	5	6	11
12	1	2	15	10	7	4	9	5	8	11	6	3	14	13	0

14	9	2	5	3	4	15	8	13	10	1	6	0	7	12	11
3	4	15	8	13	10	1	6	0	7	12	11	14	9	2	5
13	10	1	6	0	7	12	11	14	9	2	5	3	4	15	8
0	7	12	11	14	9	2	5	3	4	15	8	13	10	1	6
4	15	8	3	10	1	6	13	7	12	11	0	9	2	5	14
10	1	6	13	7	12	11	0	9	2	5	14	4	15	8	3
7	12	11	0	9	2	5	14	4	15	8	3	10	1	6	13
9	2	5	14	4	15	8	3	10	1	6	13	7	12	11	0
1	6	13	10	12	11	0	7	2	5	14	9	15	8	3	4
12	11	0	7	2	5	14	9	15	8	3	4	1	6	13	10
2	5	14	9	15	8	3	4	1	6	13	10	12	11	0	7
15	8	3	4	1	6	13	10	12	11	0	7	2	5	14	9
11	0	7	12	5	14	9	2	8	3	4	15	6	13	10	1
5	14	9	2	8	3	4	15	6	13	10	1	11	0	7	12
8	3	4	15	6	13	10	1	11	0	7	12	5	14	9	2
6	13	10	1	11	0	7	12	5	14	9	2	8	3	4	15

Slika 3.

Što mislite, sadrže li oni u sebi 16 magičnih kvadrata? Je li svaki od njih magični sudoku?

Je li možda jedan od njih i sam magični kvadrat? Koji?

Pažljivo ih proučite i pokušajte naći razlike među njima!

Da bismo konstruirali ovakve latinske ili magične kvadrate, trebamo ući u teoriju matrica i latinskih kvadrata vrlo duboko, znati mnogo o ortogonalnim matricama, ortogonalnim latinskim kvadratima, njihovim svojstvima i preslikavanjima, a to se uči mnogo, mnogo kasnije.

Literatura:

1. http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.119.09.759. (22. 9. 2013.)
2. *Matematika i škola*: Što su latinski kvadrati