# Kvaternioni i kvaternionsko rješenje kvadratne jednadžbe

Željko Zrno[1] i Neven Jurić

## 1. Uvod

Što je matematika? Na što prvo čovjeka asocira riječ *matematika*? Matematika je egzaktna znanost koja se bavi kvantitativnim odnosima među veličinama. Prva asocijacija kod većine ljudi na riječ matematika je računanje s brojevima. Osnovni pojam matematike je doista broj. Svakako da je i rješavanje raznih jednadžbi koje odgovaraju matematičkim problemima jedan od najvažnijih interesa svakog matematičara ili osobe koja se bavi egzaktnom znanošću. Tako smo se susretali s raznim vrstama jednadžbi: linearnim, kvadratnim, kubnim, bikvadratnim... sustavima jednadžbi. Postoji bogata teorija o rješavanju raznih tipova jednadžbi u matematici, a ona se i dalje razvija. Pojmovi s kojima se svatko od nas upoznao još u osnovnoj školi svakako su *brojevi* i *jednadžbe*. Ovladavanje matematikom počinje najtemeljitijim skupom brojeva. Taj se skup označava velikim slovom $\boldsymbol{N}$ i zove se **skup prirodnih brojeva**. To su brojevi: jedan, dva, tri, četiri, pet..., deset... Što se zapisuje $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5..., 10...\}$. U ovom članku cilj je napraviti „šetnju” od skupa prirodnih brojeva do manje poznatog, ali važnog skupa brojeva – *skupa kvaterniona* – i pokazati u tom skupu rješavanje kvadratne jednadžbe.

U svim tim skupovima brojeva prezentirat ćemo svojstva standardnih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Dakle, čitatelja ćemo uvesti u izgradnju algebarske strukture na jednostavan i postupan način. Sam skup i skup na kojemu je definirana algebarska operacija nije isto. Naprotiv, razlika je velika jer u drugom slučaju možemo s elementima skupa računati. Na početku definirajmo neke pojmove kojima ćemo se služiti u nastavku članka.

**Definicija 1.** Ako su $A$ i $B$ skupovi, tada skup svih uređenih parova $(a, b)$ kod kojih je $a \in A$, $b \in B$ označavamo s $A \times B$ i nazivamo *Kartezijevim produktom skupova* $A$ i $B$ tj.

$$A \times B = \left\{ (a,b) \,|\, a \in \& b \in B \right\}.$$

[1]Željko Zrno, Veleučilište „Marko Marulić”, Knin

Za dva elementa $(a, b)$ i $(c, d)$ iz $A \times B$ kažemo da su jednaki i pišemo $(a, b) =$ $= (c, d)$ onda i samo onda ako je $a = c$, $b = d$.

Ako je $A = B = S$, imamo oznaku

$$S \;\; = S \times S = \left\{ \left( a,b \right) \mid a,b \in S \right\}.$$

Općenito, ako su $A_1, A_2, ..., A_n$ skupovi, tada skup svi uređenih $n$–torki $(a_1, a_2, ..., a_n)$, gdje je $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$, označavamo s $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ i nazivamo Kartezijevim produktom skupova $A_1, A_{2,} ..., A_n$.

Analogno, ako je $A_1 = A_2 = ... = A_n$, imamo oznaku

$$S^n = S \times S \times ... \times S = \left\{ \left( a_1, a_2, ..., a_n \right) \mid a_i \in S, n \in N \right\}.$$

**Definicija 2.** Neka je $S$ proizvoljni skup. Pod (*binarnom*) *algebarskom operacijom* na skupu $S$ razumijevamo svako preslikavanje $* : S \times S \to S$.

Dakle, operacija $*$ (čitajte: $a$ zvjezdica $b$) uređenom paru $\left( a,b \right) \in S \times S$ pridružuje određeni element iz skupa $S$. Razumije se, u konkretnim slučajevima umjesto znaka $*$ koristimo se znakovima: $+, -, *, \; :$ itd.

Za operaciju $* : S \times S \to S$ kažemo da je komutativna ako za svaki $a, b \in S$ vrijedi

$$a * b = b * a.$$

Za nju kažemo da je asocijativna ako za svaki $a, b, c \in S$ vrijedi

$$\left( a * b \right) * c = a * \left( b * c \right).$$

**Definicija 3.** Uređeni par $(S, *)$ koji čini neprazni skup $S$ i na njemu definirana algebarska operacija $*$, zove se *grupoid*.

Zbrojimo li bilo koja dva prirodna broja, dobit ćemo prirodni broj, što se zapisuje

$$\left( \forall x, y \in \boldsymbol{N} \right) \left( x + y \in \boldsymbol{N} \right).$$

Isto se može reći i za množenje. Množenjem prirodnih brojeva nastaje prirodni broj,

$$\left( \forall x, y \in \boldsymbol{N} \right) \left( x \cdot y \in \boldsymbol{N} \right).$$

Dakle, $(\boldsymbol{N}, +)$ je grupoid. Isto tako vrijedi za $(\boldsymbol{N}, \cdot)$. Prvi od njih zove se *aditivni* grupoid skupa $\boldsymbol{N}$, a drugi *multiplikativni*.

**Definicija 4.** Ako je $(S, *)$ grupoid i $e \in S$, tada kažemo $e$ je *neutralni element* u odnosu na operaciju $*$ ako je

$$e * a = a * e = a \quad \text{za svaki } a \in S.$$

*Primjer.* Neutralni element množenja u grupoidu $(\boldsymbol{N}, \cdot)$ jest $e = 1$, jer je $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ za svaki $a \in \boldsymbol{N}$.

**Definicija 5.** Za grupoid $(S, *)$ kažemo da je *asocijativan* ako je asocijativna operacija. Za njega kažemo da je *komutativan* ako je $*$ komutativna operacija.

**Definicija 6.** Asocijativni grupoid zovemo *polugrupa.*

*Primjer.* ($\boldsymbol{N}$, +) i ($\boldsymbol{N}$, ·) komutativne su polugrupe.

**Definicija 7.** Ako je $(S, *)$ polugrupa koja ima neutralni element $e$, tada kažemo: $x \in S$ je *inverz* (*recipročni element*) od $a \in S$ ako je $a * x = x * a = e$.

**Definicija 8.** Polugrupu $(S, *)$ zovemo *grupa* ako su ispunjena ova dva uvjeta:

(1) polugrupa ima neutralni element, tj. postoji $e \in S$ tako da vrijedi

$$a * e = e * a = a \quad \text{za svaki } a \in S.$$

(2) svaki $a \in S$ ima inverz u $S$, tj. za svaki $a \in S$ postoji $x \in S$ tako da vrijedi

$$a * x = x * a = e .$$

Jesu li polugrupe ($\boldsymbol{N}$, +) i ($\boldsymbol{N}$, · ) i grupe? Očito nisu. Grupa koja je komutativna naziva se *Abelova*[2] grupa.

## 2. Skup realnih brojeva

Zbrajanje i množenje osnovne su računske operacije. Pored njih postoje oduzimanje i dijeljenje, ali one se razlikuju od zbrajanja i množenja po tome što za njih ne vrijedi

$$\left(\forall x, y \in \boldsymbol{N}\right)\left(x - y \in \boldsymbol{N}\right) \quad \text{i} \quad \left(\forall x, y \in \boldsymbol{N}\right)\left(x : y \in \boldsymbol{N}\right).$$

Bilo bi poželjno imati skup za koji to vrijedi. Zbog toga je u matematici skup prirodnih brojeva $\boldsymbol{N}$ proširen **skupom cijelih brojeva**

$$\boldsymbol{Z} = \left\{..., -10, ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10, ...\right\}$$

koji ispunjava uvjet $\left(\forall x, y \in \boldsymbol{Z}\right)\ \left(x - y \in \boldsymbol{Z}\right)$.

($\boldsymbol{Z}$, +) je komutativna grupa kojoj je neutralni element $e = 0$, a svaki $x \in \boldsymbol{Z}$ ima svoj inverz $-x \in \boldsymbol{Z}$, tj. $x + \left(-x\right) = \left(-x\right) + x = 0$.

Je li za svaki $x, y \in \boldsymbol{Z}$ izvedivo dijeljenje, tj. $x : y \in \boldsymbol{Z}, y \neq 0$? Znamo da nije, pa se skup $\boldsymbol{Z}$ proširuje na **skup racionalnih brojeva**

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,|\, m \in Z,\ n \in Z \, i \, n \neq 0 \right\}.$$

Za dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ kažemo da su jednaki i pišemo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ako je $ad = bc$. S obzirom da se svaki cijeli broj $x \in \boldsymbol{Z}$ može napisati u obliku razlomka $\frac{x}{1}$, skup cijelih brojeva podskup je skupa racionalnih brojeva, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Čitatelju ostavljamo da analizira svojstva algebarskih struktura ($\boldsymbol{Q}$, +) i ($\boldsymbol{Q}$, · ).

[2] N. H. Abel, norveški matematičar (1802. – 1829.)

Kao što je poznato, skup $\boldsymbol{Q}$ se dalje proširuje do **skupa realnih brojeva *R***. Naime, postoje brojevi koji se ne mogu napisati u obliku razlomka kojemu su brojnik i nazivnik cijeli brojevi, tj. brojevi koji nisu racionalni. Takve brojeve nazivamo **iracionalnim brojevima**. Oni čine skup iracionalnih brojeva koji označavamo s $\boldsymbol{I}$. Unija skupa racionalnih i iracionalnih brojeva je skup **realnih brojeva *R***. Dakle, pišemo $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\cup\boldsymbol{I}$.

Na skupu $\boldsymbol{R}$ svih realnih brojeva definirane su dvije operacije, zbrajanje (+) i množenje ( $\cdot$ ), tj. algebarske strukture $(\boldsymbol{R}, +)$ i $(\boldsymbol{R}, \cdot)$ su grupoidne, sa sljedećim svojstvima:

A1 Zbrajanje je asocijativno, tj. za sve $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ vrijedi $(x+y)+z=x+(y+z)$.

A2 Postoji neutralni element $0 \in \boldsymbol{R}$ za zbrajanje sa svojstvom $x+0=0+x=x$ za svaki $x \in \boldsymbol{R}$.

A3 Svaki $x \in \boldsymbol{R}$ ima svoj inverz $-x \in \boldsymbol{R}$ takav da je $x+(-x)=(-x)+x=0$ za svaki $x \in \boldsymbol{R}$.

A4 Zbrajanje je komutativno tako da za sve $x, y \in \boldsymbol{R}$ vrijedi $x + y = y + x$.

A5 Množenje je asocijativno tako da za sve $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ vrijedi $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

A6 Postoji neutralni element $1 \in \boldsymbol{R}$ tako da za svaki $x \in \boldsymbol{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

A7 Za svaki $x \in \boldsymbol{R}, x \neq 0$, postoji inverz $\frac{1}{x}$ takav da je $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.

A8 Množenje je komutativno tako da za sve $x, y \in \boldsymbol{R}$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.

A9 Množenje je distributivno prema zbrajanju $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, za sve $x, y, z \in \boldsymbol{R}$.

Grupa $(\boldsymbol{R}, +)$ zove se aditivna grupa realnih brojeva, a $(\boldsymbol{R}^*, \cdot)$ $(\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ multiplikativna grupa realnih brojeva različitih od nule. Radi se o Abelovim grupama. Skup realnih brojeva s ovim operacijama zbrajanja i množenja za koje vrijede svojstva od A1 do A9 nazivamo *polje realnih brojeva.* Ovdje navodimo relaciju koja vrijedi $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Sva ova navedena svojstva od A1 do A9 koristit ćemo u daljnjem proučavanju skupova brojeva.

## 3. Skup kompleksnih brojeva

Skup svih uređenih parova realnih brojeva nazivamo skupom **kompleksnih brojeva** i označujemo s $\boldsymbol{C}$, tj. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \boldsymbol{R}\}$, s definiranim operacijama + i · na $\boldsymbol{C}$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \tag{3}$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+cb), \tag{4}$$

gdje je $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}$.

Jednakost kompleksnih brojeva zapravo je jednakost uređenih parova, što smo definirali na početku članka.

Dakle, dobili smo grupoidne strukture ($\boldsymbol{C}$, +) i ($\boldsymbol{C}$, · ). Prije nego što iznesemo svojstva tih struktura, pokažimo kako možemo još zapisivati kompleksne brojeve.

Jednakost

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

ili

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)$$

možemo pisati u obliku

$$(a,b)=a+bi\,,$$

gdje se općenito uređeni par ($a$, 0) identificira s realnim brojem $a$, dok je $i$ = (0, 1) koji nazivamo *imaginarna jedinica*.

Uobičajeno je da se kompleksan broj označava jednim slovom, najčešće sa $z$, tj. $z = a + bi$. Za zapis broja $z$ u obliku $a + bi$ kažemo da je *algebarski oblik* tog broja kojemu je $a$ realni dio, a $b$ imaginarni dio od $z$. Znači, kompleksnom broju ($a$, $b$) možemo pridružiti $a + bi$ i obratno, broju $a + bi$ možemo pridružiti uređeni par ($a$, $b$).

Možemo pisati, u skladu s gornjim i zbog (4), $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, tj. dobili smo jednakost $i^2 = -1$.

Svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ možemo pridružiti njegov kompleksno konjugiran, koji označavamo i definiramo sa $\overline{z} = a - bi$, gdje vrijedi $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Pokažimo svojstva koja vrijede za operacije zbrajanja i množenja u skupu $\boldsymbol{C}$.

*Asocijativnost zbrajanja.* Vrijedi:

$$\left[(a,b)+(c,d)\right]+(e,f)=(a,b)+\left[(c,d)+(e,f)\right]$$

ili

$$\left[\left(a+c\right)+e,\left(b+d\right)+f\right]=\left[a+\left(c+e\right),b+\left(d+f\right)\right]$$

jer je zbrajanje realnih brojeva asocijativna operacija.

*Asocijativnost množenja*. Vrijedi:

$$\left[\left(a,b\right)\cdot\left(c,d\right)\right]*\left(e,f\right)=\left(a,b\right)\cdot\left[\left(c,d\right)\cdot\left(e,f\right)\right]$$

jer je

$$\left[\left(a,b\right)\cdot\left(c,d\right)\right]\cdot\left(e,f\right)=\left(ac-bd,ad+bc\right)\cdot\left(e,f\right)=\left(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce\right)$$

$$\left(a,b\right)\cdot\left[\left(c,d\right)\cdot\left(e,f\right)\right]=\left(a,b\right)\cdot\left(ce-df,cf+de\right)=\left(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf\right).$$

*Distributivnost množenja prema zbrajanju*. Vrijedi:

$$\left(a,b\right)\left[\left(c,d\right)+\left(e,f\right)\right]=\left(a,b\right)\cdot\left(c,d\right)+\left(a,b\right)\cdot\left(e,f\right)$$

jer je

$$\left(a,b\right)\cdot\left[\left(c,d\right)+\left(e,f\right)\right]=\left(a,b\right)\cdot\left(c+e,d+f\right)=\left(ac+ae-bd-bf,ad+af\ \ bc+be\right)$$

$$\left(a,b\right)\cdot\left(c,d\right)+\left(a,b\right)\cdot\left(e,f\right)=\left(ac-bd,ad+bc\right)+\left(ae-bf,af+be\right)=$$

$$=\left(ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be\right).$$

*Postojanje neutralnih elemenata.* Skup $\boldsymbol{C}$ sadrži elementa (0, 0) i (1, 0) tako da za svaki $\left(a,b\right)\in\boldsymbol{C}$ vrijedi

$$\left(a,b\right)+\left(0,0\right)=\left(a,b\right),$$

$$\left(a,b\right)\cdot\left(1,0\right)=\left(a,b\right).$$

Prema tome, (0, 0) je neutralni element u ($\boldsymbol{C}$, +), a (1, 0) je neutralni element u ($\boldsymbol{C}$, $\cdot$).

*Postojanje inverza* u ($\boldsymbol{C}$, +)

Za svaki $(a, b) \in \boldsymbol{C}$ postoji $\left(-a,-b\right)\in\boldsymbol{C}$ tako da vrijedi

$$\left(a,b\right)+\left(-a,-b\right)=\left(0,0\right).$$

Dakle je $-\left(a,b\right)=\left(-a,-b\right)$.

*Postojanje inverza* u ($\boldsymbol{C}$, $\cdot$)

Ako je $\left(a,b\right)\neq\left(0,0\right)$, tj. ako je barem jedan od brojeva $a$ i $b$ različit od nule, tada postoji $\left(x,y\right)\in\boldsymbol{C}$ tako da vrijedi

$$\left(a,b\right)\cdot\left(x,y\right)=\left(1,0\right).$$

Zaista, sustav jednadžbi

$$ax - by = 1$$
$$bx + ay = 0$$

u tom je slučaju rješiv, a rješenje glasi

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}\ ,\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Vrijedi

$$(a,b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2} \right) = (1,0).$$

*Komutativnost zbrajanja*. Vrijedi:

$$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$$

ili

$$(a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$

jer je zbrajanje realnih brojeva komutativna operacija.

*Komutativnost množenja.* Vrijedi:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$$

ili

$$(ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da)$$

jer je zbrajanje i množenje realnih brojeva komutativna operacija.

Ovime smo pokazali da je $(\boldsymbol{C}, +)$ Abelova grupa i zove se aditivna grupa kompleksnih brojeva. $(\boldsymbol{C}^*, \cdot)$ $(\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \setminus \{(0, 0)\})$ je Abelova grupa i zove se multiplikativna grupa kompleksnih brojeva različitih od nule. Skup kompleksnih brojeva s ovako definiranim operacijama zbrajanja i množenja te pokazanim svojstvima nazivamo *polje kompleksnih brojeva.*

Skup realnih brojeva $\boldsymbol{R}$ podskup je skupa kompleksnih brojeva $\boldsymbol{C}$ jer svaki $a \in \boldsymbol{R}$ možemo pisati u obliku $a = a + 0 \cdot i = (a,0)$, tj. $a = (a,0) \in \boldsymbol{C}$. Dakle, identificiramo li općenito par $(x, 0)$ s realnim brojem $x$, možemo pisati da je $\boldsymbol{R} = \{(x,0) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$, tj. $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Zgodno je na kraju, iz obilja zanimljivosti o skupu kompleksnih brojeva, izdvojiti i sljedeće: kompleksni broj $a + bi$, osim što ga možemo identificirati s uređenim parom $(a, b)$, možemo identificirati i s matricom

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

jer tada zbroju (umnošku) brojeva $a + bi$, $c + di$ odgovara zbroj (umnožak) matrica:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}.$$

To su matrice

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}.$$

Hamilton[3] je 1831. prvi objavio članak kako se s kompleksnim brojevima može postupati kao s uređenim parovima realnih brojeva. Kompleksni brojevi imaju veliku primjenu u fizici i inženjerstvu.

## 4. Skup kvaterniona

Skup svih uređenih četvorki realnih brojeva $\boldsymbol{R}^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \boldsymbol{R}\}$ i na njemu definirane operacije zbrajanja i množenja ovako

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2) \tag{5}$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\cdot(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a,b,c.d) \tag{6}$$

gdje je

$$a = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, \qquad (6_1)$$

$$b = a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1, \qquad (6_2)$$

$$c = a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - b_1d_2, \qquad (6_3)$$

$$d = a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1. \qquad (6_4)$$

zove se *Hamiltonov sustav kvaterniona* ili, kraće, **skup kvaterniona**[4].

Taj skup označavat ćemo s $\boldsymbol{K}$. Dobili smo grupoidne strukture $(\boldsymbol{K}, +)$ i $(\boldsymbol{K}, \cdot)$.

Identificiramo li uređenu četvorku $(x, y, 0, 0)$ s uređenim parom $(x, y)$, uz postojanje izomorfnog preslikavanja $(x,y) \to (x,y,0,0)$, možemo pisati $\boldsymbol{C} = \{(x,y,0,0) \mid x,y \in \boldsymbol{R}\}$, gdje je na osnovi (5) i (6)

[3]W.R. Hamilton, irski matematičar (1805. – 1865.)

[4]M. Radić, Algebra, I. dio, str. 348. i 349.

$$\left(a_1,b_1,0,0\right)+\left(a_2,b_2,0,0\right)=\left(a_1+a_2,b_1+b_2,0,0\right),$$
$$\left(a_1,b_1,0,0\right)\cdot\left(a_2,b_2,0.0\right)=\left(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1,0,0\right).$$

Dakle, vrijedi $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{K}$, tj. skup kompleksnih brojeva podskup je skupa kvaterniona. Analogno, možemo ($x$, 0, 0, 0) jednostavno identificirati s $x$.

Ako uvedemo oznake

$$1=\left(1,0,0,0\right),$$
$$\boldsymbol{i}=\left(0,1,0,0\right),$$
$$\boldsymbol{j}=\left(0,0,1,0\right),$$
$$\boldsymbol{k}=\left(0,0,01\right),$$

možemo kvaternion ($a$, $b$, $c$, $d$) pisati u obliku

$$\left(a,b,c,d\right)=\left(a,0,0,0\right)\cdot 1+\left(b,0,0,0\right)\cdot i+\left(c,0,0,0\right)\cdot j+\left(d,0,0,0\right)\cdot k$$

(uvjerite se u to). Konačno, uz gornju identifikaciju možemo pisati

$$\left(a,b,c,d\right)=a+bi+cj+dk,$$

analogno kao što smo kod kompleksnih brojeva imali $\left(a,b\right)=a+bi$.

Za kvaternione $q=a+bi+cj+dk$ i $\overline{q}=a-bi-cj-dk$ kažemo da su konjugirani. Lako se uvjeriti da je $q\cdot\overline{q}=a^2+b^2+c^2+d^2$ jer na osnovi (6) vrijedi da je $i\cdot j=k,\ j\cdot k=i,\ k\cdot i=j,\ j\cdot i=-k,\ k\cdot j=-i,\ i\cdot k=-j.$

Znači, svaki kompleksni broj $z=a+bi$ ili $z=\left(a,b\right)\in\boldsymbol{C}$ možemo pisati u obliku $z=a+bi+0\cdot j+0\cdot k$ ili $z=\left(a,b,0,0\right)\in\boldsymbol{K}$.

Iz svega prethodno izloženog možemo zaključiti da je sustav kvaterniona zapravo uopćenje sustava kompleksnih brojeva. U nastavku se osvrnimo na svojstva operacija zbrajanja i množenja u skupu $\boldsymbol{K}$, bez neke detaljne raščlambe i izbjegavanja ulaska u širinu i dubinu samog članka. Neke provjere ostavit ćemo i samom čitatelju.

*Asocijativnost zbrajanja.* Vrijedi:

$$\left[\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)+\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)\right]+\left(a_3,b_3,c_3,d_3\right)=\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)+\left[\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)+\left(a_3,b_3,c_3,d_3\right)\right]$$

ili

$$\left[\left(a_1+a_2\right)+a_3,\left(b_1+b_2\right)+b_3,\left(c_1+c_2\right)+c_3,\left(d_1+d_2\right)+d_3\right]$$
$$=\left[a_1+\left(a_2+a_3\right),b_1+\left(b_2+b_3\right),c_1+\left(c_2+c_3\right),d_1+\left(d_2+d_3\right)\right],$$

jer je zbrajanje realnih brojeva asocijativna operacija.

Neutralni element u ($\boldsymbol{K}$, +) je (0, 0, 0, 0), a lako se provjeri da svaki $\left(a,b,c,d\right)\in\boldsymbol{K}$ ima svoj inverz $\left(-a,-b,-c,-d\right)\in\boldsymbol{K}$ za zbrajanje.

*Komutativnost zbrajanja*. Vrijedi:

$$\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)+\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)=\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)+\left(a_1,b_1,c_1,d_2\right),$$

odnosno,

$$\left(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2\right)=\left(a_2+a_1,b_2+b_1,c_2+c_1,d_2+d_1\right),$$

jer je zbrajanje realnih brojeva komutativna operacija.

*Asocijativnost množenja*. Vrijedi:

$$\left[\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)\cdot\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)\right]\cdot\left(a_3,b_3,c_3,d_3\right)=\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)\cdot\left[\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)\cdot\left(a_3,b_3,c_3,d_3\right)\right].(*)$$

Primjenom (6) odnosno ($6_1$), ($6_2$), ($6_3$), ($6_4$), dobivamo rezultat izračuna lijeve strane od (*):

$$\begin{aligned}
&(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-c_1c_2a_3-d_1d_2a_3-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3-c_1d_2b_3+c_2d_1b_3-\\
&a_1c_2c_3-a_2c_1c_3-b_2d_1c_3+b_1d_2c_3-a_1d_2d_3-a_2d_1d_3-b_1c_2d_3+b_2c_1d_3,a_1a_2b_3-\\
&b_1b_2b_3-c_1c_2b_3-d_1d_2b_3+a_3a_1b_2+a_3a_2b_1+a_3c_1d_2-a_3c_2d_1+a_1c_2d_3+\\
&a_2c_1d_3+b_2d_1d_3-b_1d_2d_3-c_3a_1d_2-c_3a_1d_2-c_2a_2d_1-c_3b_1c_2+c_2b_2c_1,a_1a_2c_3-\\
&b_1b_2c_3-c_1c_2c_3-d_1d_2c_3+a_3a1c_2+a_3a_2c_1+a_3b_2d_1-a_3b_1d_2+b_3a_1d_2+\\
&b_3a_2d_1+b_3b_1c_2-b_3b_2c_1-a_1b_2d_3-a_2b_1d_3-c_1d_2d_3+c_2d_1d_3,a_1a_2d_3-b_1b_2d_3-\\
&c_1c_2d_3-d_1d_2d_3+a_3a_1d_2+a_3a_2d_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1+a_1b_2c3+a_2b_1c_3+\\
&c_1d_2c_3-c_2d_1c_3-b_3a_1c_2-b_3a_2c_1-b_3b_2d_1+b_3b_1d_2).
\end{aligned}$$

Rezultat desne strane od (*) je:

$$\begin{aligned}
&(a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-a_1c_2c_3-a_1d_2d_3-b_1a_2b_3-b_1a_3b_2-b_1c_2d_3+b_1c_3d_2-c_1a_2c_3-\\
&c_1a_3c_2-c_1b_3d_2+c_1b_2d_3-d_1a_2d_3-d_1a_3d_2-d_1b_2c_3+d_1b_3c_2,a_1a_2b_3+a_1c_2d_3-\\
&a_1c_3d_2+a_2a_3b_1-b_2b_3b_1-c_2c_3b_1-d_2d_3b_1+c_1a_2d_3+c_1a_3d_2+c_1b_2c_3-c_1b_3c_2-\\
&a_2c_3d_1-a_3c_2d_1-b_3d_2d_1+b_2d_3d_1,a_1a_2c_3+a_1a_3c_2+a_1b_3d_2-a_1b_2d_3+a_2a_3c_1-\\
&b_2b_3c_1-c_2c_3c_1-d_2d_3c_1+a_2b_3d_1+a_3b_2d_1+c_2d_3d_1-c_3d_2d_1-b_1a_2d_3-b_1a_3d_2-\\
&b_1b_2c_3+b_1b_3c_2,a_1a_2d_3+a_1a_3d_2+a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2a_3d_1-b_2b_3d_1-c_2c_3d_1-\\
&d_2d_3d_1+b_1a_2c_3+b_1a_3c_2+b_1b_3d_2-b_1b_2d_3-a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-c_2d_3c_1+c_3d_2c_1).
\end{aligned}$$

Vidimo da smo, zbog toga što je zbrajanje realnih brojeva asocijativno i množenje realnih brojeva komutativno, dobili jednake kvaternione na lijevoj i desnoj strani od (*). Time smo dokazali asocijativnost operacije množenja u skupu $\boldsymbol{K}$.

*Postojanje neutralnog elementa.*

Skup $\boldsymbol{K}$ sadrži element (1, 0, 0, 0) tako da za svaki $\left(a,b,c,d\right)\in\boldsymbol{K}$ vrijedi

$$\left(a,b,c,d\right)\cdot\left(1,0,0,0\right)=\left(a,b,c,d\right).$$

Prema tome, (1, 0, 0, 0) je neutralni element u (***K***, ·).

*Postojanje inverza* u (***K***, ·)

Može se pokazati da za svaki $(a,b,c,d)\in \boldsymbol{K}, (a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$ postoji njegov inverz $(x,\ y,\ z,\ u)\ \in\ \boldsymbol{K}$ **,** tj. da vrijedi $(a,b,c,d)\cdot(x,y,z,u)=(1,0,0,0)$. Traženi inverz ima općenito oblik:

$$x=\frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2},\ \ y=\frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2},\ z=\frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2},\ u=\frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

koji se dobije rješavanjem odgovarajućeg sustava od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice. Koristeći pravilo množenja kvaterniona (6) lako se provjeri da vrijedi

$$(a,b,c,d)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2},\frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2},\frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2},\frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right)=(1,0,0,0).$$

*Ovdje bismo naglasili da operacija množenja kvaterniona općenito nije komutativna jer vidimo na primjer da je:*

$$(0,0,0,1)\cdot(0,1,0,0)=(0,0,1,0),\quad \text{dok je}\quad (0,1,0,0)\cdot(0,0,0,1)=(0,0,-1,0).$$

*Distributivnost množenja prema zbrajanju*. Vrijedi:

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1,c_1,d_1)\cdot\left[(a_2,b_2,c_2,d_2)+(a_3,b_3,c_3,d_3)\right]\\&=(a_1,b_1,c_1,d_1)\cdot(a_2,b_2,c_2,d_2)+(a_1,b_1,c_1,d_1)\cdot(a_3,b_3,c_3,d_3).\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je (***K***, +) komutativna (Abelova) grupa, a ($\boldsymbol{K}^*$, ·), ($\boldsymbol{K}^*$ = = ***K*** \{(0, 0, 0, 0)}) je grupa. Ovdje bismo se zaustavili u svojevrsnoj „šetnji" od skupa prirodnih brojeva do skupa kvaterniona. Skup kvaterniona nije polje jer množenje kvaterniona nije komutativno. U sljedećem poglavlju na kraju ćemo prezentirati kvaternionsko rješenje kvadratne jednadžbe.

## 5. Kvaternionsko rješenje kvadratne jednadžbe

Sljedeći problem riješit ćemo tako što ćemo prvo postaviti opći princip, a zatim dati jedan primjer kvadratne jednadžbe uz specijalni izbor koeficijenata. Razmotrimo sada kvadratnu jednadžbu

$$q^2+\alpha q=\beta\,, \tag{7}$$

gdje su $\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}$ zadani kvaternioni. Uz $\alpha=(a,b,c,d)=a+bi+cj+dk$ i $\beta=(e,f,g,h)= = e+fi+gj+hk$. Jednadžba (7) svodi se na nelinearni algebarski sustav

$$\begin{aligned}x^2-y^2-u^2-v^2+ax-by-cu-dv&=e,\\2xy+bx+ay-du+cv&=f,\\2xu+cx+dy+au-bv&=g,\\2xv+dx-cy+bu+av&=h.\end{aligned} \tag{8}$$

pri čemu je $q=(x,y,v)=x+yi+uj+vk$ rješenje jednadžbe (7).

Svi brojevi $x$, $y$, $u$, $v$ trebaju biti realni. Ideja rješavanja sustava (8) temelji se na formiranju linearnog sustava u nepoznanicama $y$, $u$, $v$ iz druge, treće i četvrte jednadžbe sustava (8). To je linearni sustav

$$\begin{aligned}(2x+a)y-du+cv&=f-bx,\\ dy+(2x+a)u-bv&=g-cx,\\ -cy+bu+(2x+a)v&=h-dx,\end{aligned}$$

koji se matrično može zapisati

$$\begin{bmatrix}2x+a & -d & c\\ d & 2x+a & -b\\ -c & b & 2x+a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y\\ u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f-bx\\ g-cx\\ h-dx\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivaju se varijable $y$, $u$, $v$ izražene varijablom $x$, tj.

$$y=y(x),\ u=u(x),\ v=v(x). \tag{10}$$

Njihovim uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava (8) dobiva se jednadžba u varijabli $x$. Realna rješenja ove jednadžbe uvrštavaju se u (10) da bi se dobila sva realna rješenja $(x, y, u, v)$ sustava (8), a time i kvaternionska rješenja $x + yi + uj + vk$ polazne jednadžbe (7).

*Primjer*.

Riješiti kvadratnu jednadžbu $q^2+\alpha q=\beta$, gdje je

$$\alpha=(5,6,7,8),\ \beta=(-88,24,20,40).$$

Potrebno je, dakle, pronaći kvaternion $q=(x,y,u,v)$ sa svojstvom

$$(x,y,u,v)^2+(5,6,7,8)\cdot(x,y,u,v)=(-88,24,20,40).$$

Kod rješavanja ovoga problema moramo znati da je ono netrivijalno zbog nekomutativnosti množenja kvaterniona.

Rješavanje ove jednadžbe svodi se na rješavanje nelinearnog algebarskog sustava u nepoznanicama $x,y,u,v\in\boldsymbol{R}$.

Na temelju pravila množenja i zbrajanja kvaterniona vrijedi

$$\begin{aligned}x^2-y^2-u^2-v^2+5x-6y-7u-8v&=-88,\\ 2xy+6x+5y-8u+7v&=24,\\ 2xu+7x+8y+5u-6v&=20,\\ 2xv+8x-7y+6u+5v&=40.\end{aligned}$$

Drugu, treću i četvrtu jednadžbu zapišimo u obliku linearnog sustava s nepoznanicama $y$, $u$, $v$.

$$(2x+5)y-8u+7v=24-6x$$
$$8y+(2x+5)u-6v=20-7x$$
$$-7y+6u+(2x+5)v=40-8x$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 2x+5 & -8 & 7 \\ 8 & 2x+5 & -6 \\ -7 & 6 & 2x+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24-6x \\ 20-7x \\ 40-8x \end{bmatrix}.$$

Rješenje ovog sustava je:

$$y=-\frac{12x^3+12x^2+402x-1812}{4x^3+30x^2+224x+435},$$
$$u=-\frac{14x^3+30x^2+361x-2484}{4x^3+30x^2+224x+435},$$
$$v=-\frac{16x^3+248x-3036}{4x^3+30x^2+224x+435}.$$

Uvrštenjem ovih izraza u prvu jednadžbu $x^2-y^2-u^2-v^2+5x-6y-7u-8v=-88$ dobivamo složeniji izraz oblika

$$\frac{P_6(x)}{P_4(x)}=0\,,\ P_4(x)\neq 0 \qquad (**)$$

gdje su $P_{6,}$ $,P_4$ polinomi šestog i četvrtog stupnja. Naš je zadatak riješiti polinomijalnu jednadžbu $P_6(x)=0$ koja u faktoriziranom obliku izgleda ovako:

$$(x-1)(x+6)\left(4x^4+40x^3+824x^2+3620x+23829\right)=0\,.$$

Iz nje se odmah vide dva realna rješenja: $x_1=1, x_2=-6$, koja zadovoljavaju (**), a koja uvrštena u gornje izraze za $y$, $u$, $v$ daju

$$y_1=2,\ u_1=3,\ v_1=4, y_2=-\frac{304}{33}, u_2=-\frac{314}{33}, v_2=-\frac{380}{33.}\ .$$

Na temelju toga dobivamo dva kvaterniona koji bi trebali biti rješenja polazne kvadratne jednadžbe:

$$q_1=(1,2,3,4)=1+2i+3j+4k,$$
$$q_2=\left(-6,-\frac{304}{33},-\frac{314}{33},-\frac{380}{33}\right)=-6-\frac{304}{33}i-\frac{314}{33}j-\frac{380}{33}k.$$

Da bismo do kraja raščistili pitanje kvaternionskih rješenja zadane kvadratne jednadžbe, potrebno je ispitati polinomijalnu jednadžbu $4x^4+40x^3+824x^2 3620x+23829=0.$

Ako ova jednadžba ima realnih rješenja, tada i njih zajedno s pripadnim $y$, $u$, $v$ treba uzeti u obzir. Prije nego što riješimo ovu jednadžbu četvrtog stupnja, podsjećamo čitatelja na Ferrarijevu[5] metodu rješavanja jednadžbi četvrtog stupnja, gdje ovdje usput demonstriramo tu metodu:

Imamo jednadžbu $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ koju prikažemo u obliku

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}+2y-b\right)x^2+\left(ay-c\right)x+y^2-d\right]=0. \qquad (***)$$

Broj $y$ biramo tako da uglata zagrada bude potpuni kvadrat, jer je cilj tu kvadratnu jednadžbu prikazati u obliku razlike kvadrata, što se nakon toga prikaže kao umnožak sume i razlike, pa se tako jednadžba 4. stupnja faktorizira u dvije kvadratne jednadžbe. Dakle, diskriminanta kvadratnog izraza u uglatoj zagradi treba biti nula:

$$\left(ay-c\right)^2=4\left(\frac{a^2}{4}+2y-b\right)\left(y^2-d\right).$$

Time se dobiva *kubna rezolventa* $8y^3-4by^2+\left(2ac-8d\right)y+4bd-a^2d-c^2=0.$

Bilo koje rješenje $y$ (treba ih biti tri) dobro je i daje prikaz od (***) kao razliku kvadrata.

Vratimo se našoj konkretnoj jednadžbi

$$x^4+10x^3+206x^2+905x+\frac{23829}{4}=0, \quad \left(a=10, b=206, c=905, d=\frac{23829}{4}\right),$$

pa je kubna rezolventa $y^3-103y^2-\frac{14779}{4}y+436753=0$ ili, nakon faktoriziranja $(y-76)(2y+127)(2y-181)=0$, dobivamo $y_1=76,\ y_2=-\frac{127}{2},\ y_3=\frac{181}{2}$. Za $y=76$ dobivamo (***)

$$\left(x^2+5x+76\right)^2-\left[-29x^2-145x-\frac{725}{4}\right]=0 \quad \text{ili}$$

$$\left(x^2+5x+76\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{29}x+5\sqrt{29}}{2}i\right)^2=0$$

$$\left(x^2+5x+76+\frac{2\sqrt{29}x+5\sqrt{29}}{2}i\right)\left(x^2+5x+76-\frac{2\sqrt{29}x+5\sqrt{29}}{2}i\right)=0$$

[5] L. Ferrari, talijanski matematičar (1522. – 1565.)

Njihova su rješenja:

$$x_1 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}+2\sqrt{77}}{2} i,\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}+2\sqrt{77}}{2} i$$

$$x_3 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}-2\sqrt{77}}{2} i,\quad x_4 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}-2\sqrt{77}}{2} i.$$

Za $y = -\frac{127}{2}$ bismo dobili $\left(x^2+5x-\frac{127}{2}\right)^2 - \left(-308x^2-1540x\right)-1925) = 0$, pa opet faktorizirali i dobili $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{C}$. Isto vrijedi i za $y = \frac{181}{2.}$. (Ostavljamo čitatelju za provjeru.) Dakle, jednadžba $4x^4+40x^3+824x^2+3620x+23829=0$ nema realnih rješenja.

Uvrštavanjem $q_1, q_2$ u polaznu kvadratnu jednadžbu provjeravamo da se doista radi o njenim rješenjima. Time je pokazano da kvadratna jednadžba

$$q^2 + \left(5+6i+7j+8k\right)q + 88 - 24i - 20j - 40k = 0$$

ima dva kvaternionska rješenja

$$q_1 = 1+2i+3j+4k, \qquad q_2 = -6 - \frac{304}{33}i - \frac{314}{33}j - \frac{380}{33}k.$$

## Literatura


1. M. Radić, *Algebra*, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
2. R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academy Press, New York-London, 1966.
3. D. W. Lewis, *Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions,* Irish Math. Soc. Bull. 57 (2006.), 41-64
4. Đ. Kurepa, *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.