Tema: projekti u nastavi matematike

Diferencijalni račun[1]

Melita Štefan Trubić[1] i Ines Radošević[2]

Ključne riječi: diferencijalni račun, derivacija, primjena diferencijalnog računa

Sažetak:

Pojam derivacije i diferencijalni račun kao dio matematike koji se na njemu temelji počeli su, istovremeno i neovisno jedan o drugome, u 17. stoljeću razvijati I. Newton i G. W. Leibniz. Newton je promatrao fizikalni problem određivanja brzine materijalne točke, a Leibniz se bavio geometrijskim problemom nalaženja tangente na zadanu krivulju u nekoj točki. Otkriće diferencijalnog računa omogućilo je rješavanje mnogih problema pred kojima je klasična matematika do tada bila nemoćna, te opisivanje mnogih fizikalnih zakona i prirodnih pojava važnih za razumijevanje svijeta koji nas okružuje. Danas derivacije i njihove primjene predstavljaju jedno od najvažnijih područja matematičke analize. Neizostavan su dio visokoškolskog obrazovanja u prirodnim i tehničkim znanostima, a u nastavu se srednjoškolske matematike uvode u četvrtim razredima, nakon što učenik usvoji pojmove niza, reda, limesa i neprekidnosti. Pored uvođenja pojma derivacije, njegove geometrijske interpretacije, te usvajanja osnovnih pravila i tehnika deriviranja, programom je predviđena primjena derivacija na ispitivanje tijeka grafa funkcija. Proširenje na pojmove diferencijala, linearizacije i aproksimacije funkcije Taylorovim polinomom, te optimizaciju i njezinu primjenu na praktične probleme u različitim područjima, otvara mogućnost upućivanja učenika u istraživački rad u vidu niza manjih projektnih zadataka. Rješavanje odabranih primjerenih zadataka koji opisuju poznate situacije iz svakodnevnog života primjenom difrencijalnog računa učenika će potaknuti na uočavanje i otkrivanje određenih zakonitosti te stvaranje određenih zaključaka kroz aktivno učenje.

2. Uvod

Mnoge se matematičke teme mogu bolje shvatiti ako su neposredno povezane sa stvarnim životnim problemima i situacijama. Ako je moguće, pri obradi novih sadržaja svakako treba uvijek isticati poveznice i primjenu novih spoznaja na svijet

[1]Predavanje je održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH.

[2]Melita Štefan Trubić, Sveučilište u Rijeci / Tehnički fakultet, Rijeka

[3]Ines Radošević, Sveučilište u Rijeci / Odjel za matematiku, Rijeka

oko nas. Na taj način učenje postaje zanimljivije, a time i jednostavnije. Istovremeno, odabirom se odgovarajućih zadataka učenika potiče na razvijanje samostalnog razmišljanja, kreativnosti, te aktivnije povezivanje novih i već usvojenih znanja. Diferencijalni račun upravo je takav sadržaj koji je neposredno povezan s mnogim procesima i pojavama koje nas svakodnevno okružuju. Stoga je vrlo prikladan za uvođenje manjih projektnih zadataka koji će zahtijevati istraživački rad, uočavanje određenih zakonitosti i analogija, postavljanje matematičkog modela i na kraju njegovo rješavanje. Ovakvo učenje matematike ima još jednu prednost. Ono primorava učenika da uobičajene, napamet naučene metode i tehnike rješavanja pojedinih problema, zamijeni onima koje će zahtijevati njegovo aktivno razmišljanje, preispitivanje različitih mogućnosti rješavanja i predviđanje granica unutar kojih bi se rješenje trebalo nalaziti. Kako matematika ne bi postala kod većine učenika samo naprednija umjetnost računanja, učenikovu prirođenu znatiželju treba poticati ulaganjem dodatnih didaktičkih napora i odabirom odgovarajućih matematičkih problema, što se primjerom nastojalo pokazati u ovome radu.

2. Diferencijalni račun

Derivacije zajedno sa svojim primjenama predstavljaju jedno od najvažnijih područja matematičke analize. Pojam derivacije i diferencijabilnosti uvodi se na sljedeći način.

Ako za realnu funkciju f realne varijable u točki x postoji

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x},$$

tada dobivenu vrijednost označavamo s

$$f'\left(x\right)=\frac{df}{dx}\left(x\right)$$

i zovemo derivacijom funkcije f u točki x, te kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x. Na skupu svih točaka u kojima je funkcija f derivabilna, definirana je nova funkcija f' koju nazivamo derivacijom funkcije f. Drugim riječima, derivacija zavisne veličine f u odnosu na nezavisnu veličinu x govori koliko se brzo promijeni veličina f s promjenom vrijednosti x.

Za otkriće pojma derivacije i razvoj dijela matematike koji se na njemu temelji, diferencijalnog računa, zaslužni su Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz. U 17. su stoljeću, istovremeno i neovisno jedan o drugome, promatrali probleme koji su ih doveli do spoznaja čija je važnost danas neprocjenjiva za rješavanje mnogih problema. Niz pitanja iz prirodnih i tehničkih znanosti, na koja klasična matematika do tada nije nalazila odgovora, mogla su napokon biti riješena i objašnjena.

Newton je promatrao fizikalni problem određivanja brzine materijalne točke, vidi [1]. Kod gibanja materijalne točke po pravcu, pri čemu je jednadžba gibanja dana sa $s = s(t)$, omjer

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

određuje srednju brzinu na putu između $s(t+\Delta t)$ i $s(t)$. Prava se brzina u trenutku t definira kao derivacija puta po vremenu, odnosno

$$v(t)=\frac{ds}{dt}(t).$$

S druge strane Leibniz se bavio geometrijskim problemom nalaženja tangente na zadanu krivulju u nekoj točki. Ako je s $f = f(x)$ određena neka krivulja u ravnini, tada omjer

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

predstavlja nagib sekante kroz točke $(x, f(x))$ i $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Nagib tangente na danu krivulju u točki x bit će upravo jednak derivaciji funkcije f u toj točki

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x).$$

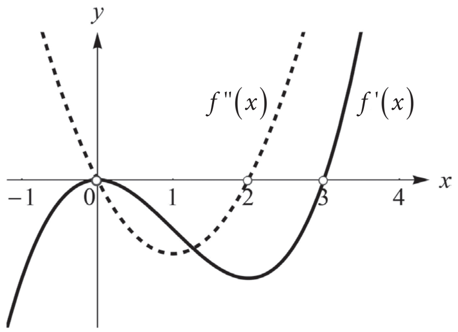
Dodir s prvim primjenama diferencijalnog računa koje se odnose na traženje prave brzine i nagiba tangente učenici četvrtih razreda određenih srednjih škola ostvare neposredno pri uvođenju pojma derivacije. Nakon usvajanja osnovnih pravila i tehnika deriviranja, programom je predviđena primjena derivacija na ispitivanje tijeka grafa funkcija. Ovdje učenici nauče koristiti derivacije za određivanje ekstremnih vrijednosti odabrane funkcije, utvrđivanje intervala monotonosti, intervala konveksnosti i konkavnosti, te na temelju dobivenih podataka analiziraju oblik grafa dane funkcije. Kako bi pokazali da derivacije imaju daleko širu primjenu od one koja se odnosi na strogo matematički zadane funkcije, može se jednostavno uvesti proširenje na pojmove diferencijala, linearizacije i aproksimacije funkcije Taylorovim polinomom u vidu niza manjih projektnih zadataka. Posebno treba istaknuti optimizaciju i njezinu primjenu na praktične probleme iz različitih područja.

3. Primjena difrencijalnog računa

3.1. Ispitivanje tijeka funkcije

Pored klasičnih primjera primjene derivacija na ispitivanje tijeka funkcija koje nalazimo u većini literature i koji se rješavaju poznatim uobičajenim tehnikama, usvojeno se znanje može jednostavno i vrlo učinkovito provjeriti rješavanjem određenih nestandardiziranih problema. Na taj će način do izražaja doći učenikova samostalnost i kreativnost. Pri tome se učenika kroz uočavanje i otkrivanje određenih zakonitosti te stvaranje određenih zaključaka potiče na svladavanje osnovnih pojmova s potpunim razumijevanjem. U nastavku su navedena dva takva primjera.

Primjer 1. Na slici je punom linijom prikazan graf prve derivacije $f'(x)$ i crtkanom linijom graf druge derivacije $f''(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$. Treba utvrditi intervale monotonosti polazne funkcije $f(x)$, odrediti točke lokalnih ekstrema i obrazložiti o kojem je ekstremu riječ, te zapisati intervale konveksnosti i konkavnosti.

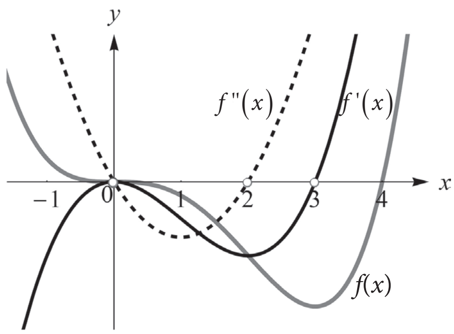


Rješenje. Točke s apscisama $x = 0$ i $x = 3$ u kojima graf prve derivacije $f'(x)$ siječe apscisnu os, pod pretpostavkom da su iste u domeni funkcije, stacionarne su točke, odnosno mogući lokalni ekstremi polazne funkcije $f(x)$. Pomoću vrijednosti prve derivacije u točkama iz njihove neposredne okoline može se odrediti jesu li to lokalni ekstremi. U točkama lijevo i desno od točke s apscisom $x = 0$ vrijednosti funkcije prve derivacije $f'(x)$ su negativne, pa budući da prolaskom kroz $x = 0$ vrijednost prve derivacije $f'(x)$ ne mijenja predznak, zaključujemo da u točki s apscisom $x = 0$ nema lokalnog ekstrema. Vrijednosti su funkcije prve derivacije $f'(x)$ u točkama lijevo od točke s apscisom $x = 3$ negativne, a u točkama desno od iste pozitivne. Prolaskom kroz točku s apscisom $x = 3$ vrijednost prve derivacije $f'(x)$ mijenja predznak, pa zaključujemo da u toj točki postoji lokalni ekstrem. Budući da se predznak mijenja iz negativnog u pozitivan, odnosno da na tom dijelu padajuća funkcija prelazi u rastuću, možemo reći da u točki s apscisom $x = 3$ postoji lokalni minimum. Funkcija $f(x)$ će monotono padati za $x \in \langle -\infty, 3\rangle$ i monotono rasti za $x \in \langle 3, \infty\rangle$.

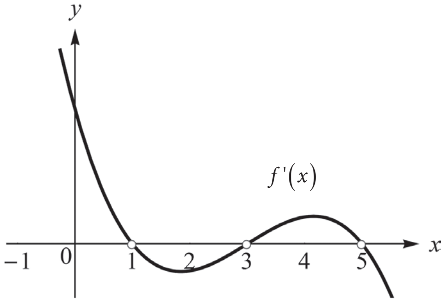
Graf druge derivacije $f''(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$ siječe apscisnu os u točkama s apscisama $x = 0$ i u $x = 2$. Uz pretpostavku da su iste u domeni funkcije, to su apscise mogućih točaka infleksije odnosno točaka u kojima konveksni dio funkcije prelazi u konkavan dio, i obratno. Vrijednosti su funkcije druge derivacije $f''(x)$ u točkama lijevo od točke s apscisom $x = 0$ pozitivne, a u točkama desno od nje negativne. Prolaskom kroz točku s apscisom $x = 0$ vrijednost druge derivacije $f''(x)$

mijenja predznak, što znači da funkcija $f(x)$ prelazi iz konveksne u konkavnu, pa zaključujemo da u točki s apscisom $x = 0$ postoji točka infleksije. Slično vrijedi i za točku s apscisom $x = 2$. U točkama lijevo od točke s apscisom $x = 2$ vrijednosti druge derivacije funkcije su negativne, a u točkama desno od nje pozitivne. Zbog promjene predznaka vrijednosti druge derivacije $f''(x)$ kroz točku s apscisom $x = 2$, pri čemu konkavnost funkcije $f(x)$ prelazi u konveksnost, zaključujemo da u toj točki također postoji točka infleksije. Funkcija $f(x)$ bit će konveksna za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$ i konkavna za $x \in \langle 0, 2\rangle$. Pomoću druge derivacije možemo potvrditi zaključke dobivene promatranjem prve derivacije. Na osnovi grafova funkcije prve derivacije $f'(x)$ i druge derivacije $f''(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$ možemo reći da u točki s apscisom $x = 0$ ne postoji lokalni ekstrem jer druga derivacija u toj točki nije različita od nule. U točki s apscisom $x = 3$ druga derivacija ima pozitivnu vrijednost, tj. $f''(3) > 0$, što dokazuje da je riječ o lokalnom minimumu. Time smo potvrdili zaključke o ekstremima koje smo već prethodno donijeli koristeći $f'(x)$.

Zaključke koje smo donijeli promatrajući grafove prve derivacije $f'(x)$ i druge derivacije $f''(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$ potvrđujemo sljedećom slikom na kojoj je plavom bojom prikazana polazna funkcija $f(x)$.



Primjer 2. Na slici je prikazan graf prve derivacije $f'(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$. Treba utvrditi intervale monotonosti polazne funkcije $f(x)$, odrediti točke lokalnih ekstrema i obrazložiti o kojem je ekstremu riječ, te zapisati intervale konveksnosti i konkavnosti.



Rješenje. Točke s apscisama $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$ u kojima graf prve derivacije $f'(x)$ siječe apscisnu os, pod pretpostavkom da su iste u domeni funkcije, stacionarne su točke, odnosno mogući lokalni ekstremi polazne funkcije $f(x)$. Budući da vrijednosti prve derivacije prolaskom kroz navedene stacionarne točke mijenjaju predznak, zaključujemo da u svim trima točkama imamo lokalne ekstreme. Promatrajući s lijeve strane na desnu, vrijednosti funkcije prve derivacije $f'(x)$ mijenjaju predznak u točki s apscisom $x = 1$ iz pozitivnog u negativno, u točki s apscisom $x = 3$ iz negativnog u pozitivno, i u točki s apscisom $x = 5$ ponovno iz pozitivnog u negativno. Stoga u točkama s apscisama $x = 1$ i $x = 5$ imamo lokalne maksimume, a u točki s apscisom $x = 3$ dobivamo lokalni minimum.

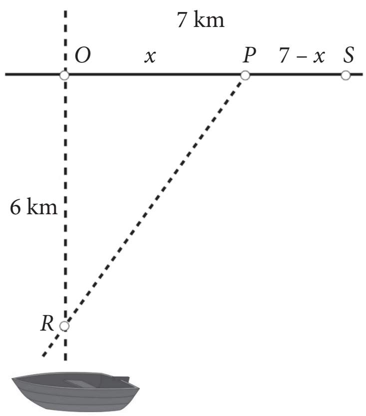
Promatrajući monotonost funkcije prve derivacije $f'(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$, može se utvrditi da funkcija $f'(x)$ monotono pada na intervalu $\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$ i monotono raste za $x \in \langle 2, 4\rangle$. To znači da je vrijednost druge derivacije $f''(x)$ nepoznate funkcije $f(x)$ na intervalu $\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$ negativna i na intervalu $\langle 2, 4\rangle$ pozitivna, pa je polazna funkcija $f(x)$ na intervalu $\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$ konkavna i na intervalu $\langle 2, 4\rangle$ konveksna.

3.2. Optimizacija

U primjeni diferencijalnog računa na probleme optimizacije može se na jednostavan način izaći iz strogih matematičkih okvira i riješiti odabrane probleme iz različitih životnih situacija, vidi [3]. Primjer takvog problema slijedi u nastavku.

Primjer 3. Ribar se nalazi u čamcu na udaljenosti 6 km od obale jednog malog otoka. Primio je poziv i mora se vratiti u svoje selo koje je 7 km pravocrtno udaljeno od mjesta na ravnoj obali koje je najbliže ribaru. Ako ribar prelazi 5 km na sat pješice, a čamcem 3 km na sat, gdje treba pristati između sela i mjesta najbližeg trenutnoj poziciji da bi stigao u selo za najkraće vrijeme?

Rješenje. Mjesto na obali najbliže ribaru označit ćemo točkom *O* i ono u matematičkom smislu predstavlja nožište normale spuštene iz položaja *R* gdje se nalazi ribar na pravac obale. S x ćemo označiti udaljenost od točke *O* na obali do mjesta *P* gdje ribar mora pristati. Preostali put do sela *S* koji ribar mora propješačiti bit će jednak $7 - x$ kilometara, vidi sliku.



Prema Pitagorinom poučku udaljenost koju ribar mora proći čamcem jednaka je $\sqrt{6^2 + x^2}$ kilometara. Poznato je da je kod jednolikog gibanja po pravcu utrošeno vrijeme jednako kvocijentu prijeđenog puta i brzine. Ukupno vrijeme utrošeno na put od točke R do točke S računamo zbrajajući vrijeme provedeno u vožnji čamcem i ono provedeno u pješačenju, pa imamo

$$t(x)=\frac{\sqrt{6^2+x^2}}{3}+\frac{7-x}{5}.$$

Budući da za x vrijedi $0\le x\le 7$, funkcija $t(x)$ definirana je na zatvorenom intervalu $[0,7]$.

Deriviranjem dobivamo

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}}-\frac{1}{5}=\frac{x}{3\sqrt{36+x^2}}-\frac{1}{5}.$$

Izjednačavanjem dobivene derivacije s nulom i rješavanjem po varijabli x imamo

$$\frac{x}{3\sqrt{36+x^2}}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{x^2}{36+x^2}=\frac{9}{25}$$

$$16x^2=36\cdot 9$$

$$x^2=\frac{81}{4}$$

$$x=4.5 \text{ km}$$

Je li dobivena stacionarna točka i lokalni ekstrem zadane funkcije $t(x)$, ispitat ćemo uvrštavanjem vrijednosti $x = 4.5$ km u drugu derivaciju. Vrijedi

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{36+x^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{36+x^2}}}{36+x^2}=\frac{36}{3\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}}=\frac{12}{\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}}.$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}(4.5)>0,$$

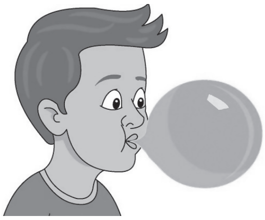
što znači da funkcija $t(x)$ u $x = 4.5$ km ima lokalni minumum. Vrijednost funkcije $t(x)$ u $x = 4.5$ km jednaka je

$$t(4.5) = 3 \text{ h}.$$

Dakle, ribar treba pristati čamcem na mjesto udaljeno 4.5 km od točke O i od toga mjesta nastaviti dalje pješice preostalih 2.5 km da bi stigao do svoga sela u najkraćem mogućem vremenu. Kako bi stigao u svoje selo, potrebna su mu 3 sata.

3.3. Derivacije i brzine promjena

Derivacije su funkcije koje na određeni način mjere brzinu kojom se nešto mijenja. One su granična vrijednost prosječnih promjena. Stoga pomoću derivacija možemo jednostavno izračunati brzinu takvih promjena, odnosno brzinu kojom se mijenja jedna veličina ako je poznata brzina promjene druge veličine i njihova funkcijska zavisnost. Jedan primjer problema kojim možemo ispitati opisanu brzinu promjena dan je u nastavku.



Primjer 4. Koliko se brzo mijenja polumjer okruglog balona pri upuhivanju zraka brzinom od 12 cm^3 / s?

Rješenje. Brzinu promjene kojom se mijenja polumjer odredit ćemo diferenciranjem veze između varijabli koje promatramo. Volumen upuhanog zraka i polumjer okruglog balona povezani su sljedećom funkcijskom vezom

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ako se polumjer r balona mijenja u vremenu, tj. $r = r(t)$, tada je i volumen funkcija od t, tj. $V = V(r(t))$. Koristeći izraz za derivaciju složene funkcije slijedi

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt},$$

pri čemu $\frac{dV}{dt}$ predstavlja brzinu promjene volumena V, a $\frac{dr}{dt}$ brzinu promjene polumjera r u proizvoljnom trenutku t. Iz postavki primjera imamo $\frac{dV}{dt}=12\text{cm}^3/\text{s}$, pa je

$$\frac{dr}{dt}=\frac{12}{4\pi r^2}=\frac{3}{\pi r^2}\text{cm}/\text{s}.$$

Za relativno mali polumjer r, brzina promjene $\frac{dr}{dt}$ bit će velika, dok će za veći polumjer r, brzina promjene $\frac{dr}{dt}$ biti manja. Tako će npr. za balon polumjera $r = 2$ cm, brzina promjene biti jednaka $\frac{dr}{dt}=\frac{3}{4\pi}\text{cm}/\text{s}=0.24\,\text{cm}/\text{s}$, dok će za balon polumjera $r = 15$ cm, brzina promjena biti jednaka $\frac{dr}{dt}=\frac{3}{225\pi}\text{cm}/\text{s}=0.004\,\text{cm}/\text{s}$.

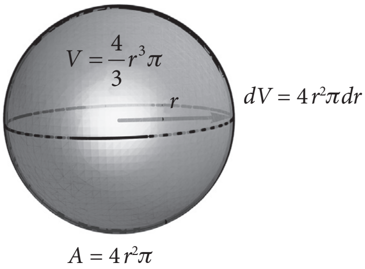
Primjer 5. Zanimljivo je primijetiti da je derivacija izraza za volumen kugle

$$V=\frac{4}{3}r^3\pi$$

po varijabli r upravo jednaka površini sfere

$$A = \frac{dV}{dr} = 4r^2\pi.$$

Za to postoji jednostavno objašnjenje. Primjerice, ako na tenisku lopticu stavimo tanki sloj masti koji će joj polazni radijus povećati za dr tada će se volumen kugle promijeniti za $dV = 4r^2\pi dr$, odnosno za umnožak njezinog oplošja i promjene radijusa dr. Dakle, promjenom polumjera r promijenit će se i volumen za vrijednost proporcionalnu oplošju kugle. O kugli možemo razmišljati kao nizu jako tankih sfera zalijepljenih jednih na drugu. Svaki sloj sfere pridonosi i utječe na vrijednost volumena svojom debljinom, tj. mogu se zbrojiti svi umnošci površine kugle i debljine određenog nivoa. To je slično bojenju lopte. Porast volumena dV odgovara količini korištene boje koja je jednaka upravo umnošku površine kugle A i debljine sloja boje dr, vidi sliku.



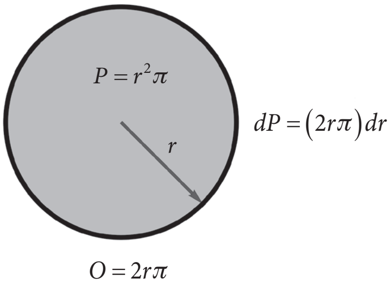
Na sličan način možemo promatrati izraze za površinu $P = r^2\pi$ i opseg kruga $O = 2r\pi$. Uočimo da je derivacija izraza za površinu kruga

$$P(r) = r^2\pi$$

jednaka upravo opsegu kruga

$$O = \frac{dP}{dr} = 2r\pi \ .$$

Zamislimo veliki krug kojemu smo povećali polumjer s r na $r + dr$, tj. za jako malu veličinu dr. Za koliko će se promijeniti površina? Jedina dodatna površina koju smo time dobili odnosit će na vrlo tanki prsten oko kruga. Kako je takav prsten beskonačno tanak i njegova debljina teži k nuli, njegova će površina biti jednaka upravo opsegu kruga. Drugim riječima, za promjenu površine vrijedi $dP = (2r\pi)dr$, odnosno mala promjena površine jednaka je umnošku male promjene polumjera i opsega kruga. Dakle, može se zaključiti da se promjenom polumjera kruga za jako malu vrijednost dr površina kruga mijenja za $(2r\pi)dr$.



Poznavajući izraze za računanje površine kruga i volumena kugle, te njihovu povezanost s izrazima za računanje opsega kruga i površine sfere preko derivacija, učenici će upotpuniti sliku o krugu, kružnici i derivacijama, što će im omogućiti da lakše zapamte navedene izraze.

3.4. Linearizacija i Taylorov polinom

Ponekad je potrebno složenu funkciju $f(x)$ u okolini neke točke zamijeniti jednostavnijom funkcijom kojom je lakše računati. Ideja je zamijeniti je polinomom. Najjednostavnije je zadanu funkciju u okolini neke točke linearizirati, tj. zamijeniti je linearnom funkcijom ili polinomom prvog reda. To znači da će se krivulja određena nekom složenom funkcijom u okolini neke točke zamijeniti pravcem koji će predstavljati njezinu tangentu u odabranoj točki na zadanu krivulju. Prema [2] iz poznatog izraza za računanje tangente

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

dobivamo

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

odnosno Taylorov polinom prvog reda oblika

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Desna strana Taylorovog polinoma prvog reda predstavlja vrijednost tangente u točki x. Primijetimo da vrijedi $T_1(x_0) = f(x_0)$ i $T_1'(x_0) = f'(x_0)$.

Ako želimo dobiti točnost višeg reda, onda možemo koristiti aproksimaciju drugog reda, odnosno kvadratnu aproksimaciju dva puta derivabilne funkcije $f(x)$ u okolini neke točke x_0. To znači da ćemo krivulju odabrane složenije funkcije zamijeniti parabolom. Oblik je takve aproksimacije jednak

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0) \;,$$

pri čemu zahtijevamo da vrijedi $T_2(x_0) = f(x_0)$, $T_2'(x_0) = f'(x_0)$ i $T_2''(x_0) = f''(x_0)$.

Iz navedenih se uvjeta dobiva da je $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$, odnosno da je Taylorov polinom drugog reda oblika

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 .$$

Slično se može pokazati da je za n-puta derivabilnu funkciju $f(x)$ Taylorov polinom n-tog reda oblika

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n ,$$

pri čemu je greška aproksimacije, kao mjera koliko dobro Taylorov polinom n-tog reda aproksimira $(n+1)$-puta derivabilnu funkciju $f(x)$, oblika

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)(x - x_0)^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Promotrimo primjenu Taylorovog polinoma na sljedećem primjeru.

Primjer 6. Odrediti linearnu i kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x) = x^2 - \ln x$ u okolini točke $x_0 = 1$, a zatim približno izračunati $f(1.2)$.

Rješenje. Prva i druga derivacija zadane funkcije $f(x)$ redom su jednake

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}, \quad f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} .$$

Uvrštavanjem točke $x_0 = 1$ u $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$, dobivaju se vrijednosti

$$f(1) = 1, \; f'(1) = 1, \qquad f''(1) = 3.$$

Linearna aproksimacija zadane funkcije $f(x)$ odnosno Taylorov polinom prvog reda u okolini točke $x_0 = 1$ jednak je

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + (x - 1) .$$

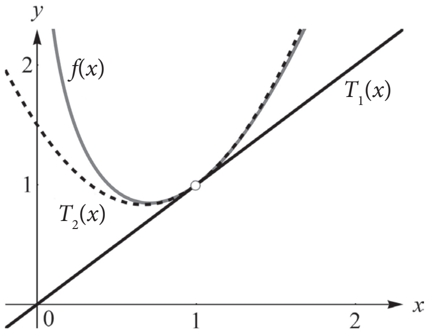
Kvadratna aproksimacija ili Taylorov polinom drugog reda u okolini točke $x_0 = 1$ jednak je

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2} f''(1)(x - 1)^2 = 1 + (x - 1) + \frac{3}{2}(x - 1)^2 .$$

Funkcija $f(x)$ i dobiveni Taylorovi polinomi prvog i drugog reda prikazani su na slici.

Približnu vrijednost $f(1.2)$ dobit ćemo uvrštavanjem točke $x = 1.2$ u dobivenu linearnu aproksimaciju

$$f(1.2) \approx T_1(1.2)$$
$$f(1.2) \approx 1 + (1.2 - 1) = 1.2 ,$$



odnosno u izračunatu kvadratnu aproksimaciju

$$f\left(1.2\right) \approx T_2\left(1.2\right)$$

$$f\left(1.2\right) \approx 1+\left(1.2-1\right)+\frac{3}{2}\left(1.2-1\right)^2 = 1.2+1.5\cdot 0.04 = 1.26\,.$$

Budući da je vrijednost koju dobivamo pomoću kalkulatora jednaka 1.2576, može se zaključiti da je kod linearne aproksimacije apsolutna greška u izračunu 0.0576, a kod kvadratne aproksimacije 0.0024. To je i očekivano s obzirom da je kvadratna aproksimacija višeg reda točnosti u odnosu na linearnu.

3.5. Diferencijal

Taylorov polinom prvog stupnja od svih je polinoma prvog stupnja nasličniji funkciji $f(x)$ u okolini zadane točke x_0 i predstavlja tangentu na funkciju $f(x)$ u toj točki. Prema [4] približnu vrijednost prirasta funkcije Δf uslijed prirasta nezavisne varijable Δx može se izračunati kao

$$\Delta f \approx f'\left(x_0\right)\Delta x\,.$$

Ova relacija za beskonačno male promjene nezavisne i zavisne varijable postaje definicija diferencijala funkcije

$$df = f'\left(x_0\right)dx\,.$$

Pomoću diferencijala možemo mjeriti približnu promjenu vrijednosti funkcije kada se argument promijeni za dx, te približno izračunati vrijednosti funkcija u odabranim točkama pomoću izraza

$$f\left(x+\Delta x\right) \doteq f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x\,.$$

Primjer 7. Poznato je da povećanjem duljine brida kocke leda za 0.2 cm, promjena njezinog volumena iznosi 5.4 cm^3. Korištenjem diferencijala treba odrediti približnu promjenu koja odgovara povećanju duljine njezinog brida za 0.3 cm. Ako ugostitelji ledomat namjeste za izradu kocki leda s duljinom brida većom za 0.3 cm, procijenite koliko će pića morati manje utočiti u istu čašu od 1dcl ako u nju dodaju tri takve kocke leda? Koliki je točan prirast?

Rješenje. Najprije moramo odrediti kolika je duljina početnog brida kocke leda. Poznato je da je diferencijal volumena $\Delta V = 5.4$ cm^3, te da je prirast duljine brida jednak $\Delta a = da = 0.2$ cm. Deriviranjem izraza za računanje volumena kocke $V(a) = a^3$ dobivamo

$$V'(a) = 3a^2 .$$

Kako je

$$\Delta V \approx dV = V'(a)da = 3a^2 da$$

$$5.4 = 3a^2 \cdot 0.2$$

$$a^2 = \frac{5.4}{0.6} = 9,$$

zaključujemo da je početna duljina brida kocke leda jednaka $a = 3$ cm. Ako ugostitelji povećaju duljine njezinog brida za 0.3 cm, nastala promjena volumena ΔV bit će približno jednaka:

$$\Delta V \approx dV = V'(3) \cdot 0.3 = 3 \cdot 9 \cdot 0.3 = 8.1 \text{ cm}^3.$$

Dakle, točenjem pića u čašu od 1dcl s tri kocke leda duljine brida 3.3 cm, gosti gube

$$3 \cdot 8.1 \text{ cm}^3 = 24.3 \text{ cm}^3,$$

odnosno od naručenih 1 dcl ili 100 cm^3 svoga pića dobivaju samo 75.7 cm^3 ili 0.757 dcl.

Točan prirast jednak je

$$\Delta V = V(3.3) - V(3) = 3.3^3 - 3^3 = 35.937 - 27 = 8.937 \text{ cm}^3,$$

što znači da apsolutna pogreška iznosi $\left|\Delta V - dV\right| = 0.837 \text{ cm}^3$.

Primjer 8. Izračunati približno $\sqrt[3]{28}$.

Rješenje. Definirat ćemo funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i tražiti $f(28)$. Poznato je da je $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$. Približnu vrijednost izračunat ćemo pomoću diferencijala definirane funkcije i izraza

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

pri čemu je $\Delta x = 1$.

Deriviranjem funkcije $f(x)$ dobivamo

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ,$$

odnosno

$$f'(27)=\frac{1}{3\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{9}\ .$$

Vrijedi

$$f(28)\approx f(27)+f'(27)\cdot 1=3+\frac{1}{9}=3.\dot{1}\ .$$

Točna vrijednost dobivena kalkulatorom jednaka je 3.036, što znači da apsolutna pogreška iznosi 0.075İ.

Zaključak

Osnovna ideja ovoga rada je da se naglasak sa standardiziranih jednoobraznih zadataka i tehnika rješavanja u procesu učenja premjesti na realnije problemske zadatke koji će zahtijevati promišljanje i postavljanje jednostavnih matematičkih modela. Tako učenje dobiva dublji smisao i kvalitetnije temelje, a matematika se doživljava u svom punom opsegu. Zbog toga su u ovom radu na vrlo jednostavan, a opet zanimljiv način uvedene različite primjene diferencijalnog računa u nekoliko odabranih praktičnih primjera. Rješavanjem zadataka koji ispituju kako promjene jedne veličine utječu na druge, učenika se nastojalo potaknuti na razumijevanje i razmišljanje, s ciljem uočavanja i otkrivanja određenih zakonitosti, te stvaranja odgovarajućih zaključaka. Na taj će način, aktivnim učenjem i stavljanjem matematičkog sadržaja u kontekst svakodnevnice, učenici matematiku doživjeti kao smislenu znanost koja nije sama sebi svrhom.

Literatura

1. I. Slapničar, *Matematika 1, 2.dio*, FESB, Split, 2008.
2. J. Stewart, Calculus, 7th edition, Brooks/Cole, Toronto, 2012.
3. G. B. Thomas, M.D.Weir, Joel R. Hass, *Thomas' Calculus*, 12th edition, Boston, 2010.
4. N. Črnjarić-Žic, S. Maćešić, predavanja iz kolegija *Matematika 1* i *Matematika 2* na sveučilišnim studijima strojarstva, brodogradnje, elektrotehnike i računarstva, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2012.