Konačno ili beskonačno? Kako učenici i studenti shvaćaju pojam beskonačnosti

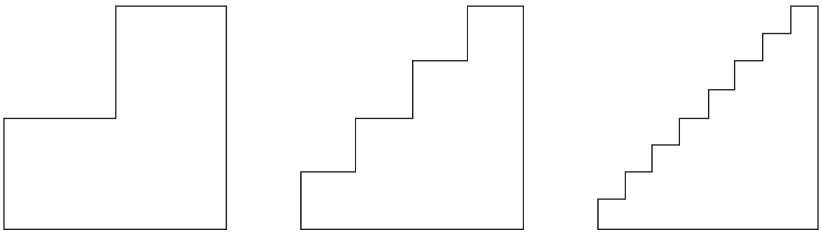
Marija Štivić[1] i Ljerka Jukić Matić[2]

1. Problemski zadatci sa ∞

Promotrimo sljedeće probleme:

Problem 1.

Stubište se sastoji od dviju stuba, a svaka stuba ima visinu i širinu 1 m. Od tog stubišta načinjeno je novo stubište koje ima dvostuko veći broj stuba. Stube su nastale prepolavljanjem visine i širine prethodnih stuba. Ako induktivno nastavimo taj proces, dobivamo čitavu familiju, čitav skup stuba. Što je krajnji rezultat ovog procesa? Što možemo zaključiti o duljini stubišta?



stubište 1 stubište 2 stubište 3

Slika 1. Stubište

Što mislite kakav bi odgovor dali učenici četvrtog razreda (gimnazije ili tehničke škole) ili studenti prirodnih i tehničkih znanosti na ovo pitanje? Hoće li učenici ili studenti reći da je krajnji rezultat geometrijske konstrukcije stubište s beskonačnim

[1]Marija Štivić, Gospodarska škola Istituto professionale Buje, Slavonski Brod
[2]Ljerka Jukić Matić, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

brojem stuba čija je veličina jako, jako mala (infinitezimalna), ili će reći da je nastala kosina kojoj je nagib 1?

Problem 2.

Ako su dani beskonačni skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$ i $B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24...\}$, koji od njih ima više elemenata ili imaju jednak broj elemenata? Što mislite kako bi učenici odgovorili da su skupovi stavljeni jedan iznad drugog? Ili ako je dan geometrijski prikaz skupa *A* kao skupa dužina duljine 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, a prikaz skupa *B* kao skupa opsega kvadrata čije su duljine stranica 1 cm, 2 cm, 3 cm...? Bi li učenici zaključili da su oba skupa beskonačna ili samo jedan od njih?

U ovim problemima javlja se pojam beskonačnosti, i to na način sličan onome koji je mučio matematičare tijekom povijesti.

2. Nastanak pojma beskonačnosti

Matematički pojmovi *beskonačnost* i *limes* bili su isprepleteni čitavu povijest, od samog njihovog pojavljivanja. Priča o beskonačnosti počinje s drevnim Grcima. Grčka riječ „aperion" znači neograničen, neodređen ili nedefiniran. Za Grke, beskonačnost nije postojala u stvarnosti, nego je taj pojam bio tek potencijalni konstrukt. Prvi je pojam beskonačnosti razmatrao Anaksagora koji kaže: *Među malim veličinama ne postoji najmanja, već smanjivanje ide neprekidno, ili uvijek postoji nešto što je veće od onog što je veliko*. On dakle već tada razlikuje beskonačno male i beskonačno velike veličine. Među prve matematičke pokušaje da se pristupi problemu beskonačnosti, pripada i čuveni Zenonov paradoks *Ahileja i kornjače*. Pitagorejci su cijelu geometriju nastojali zasnovati na cijelim brojevima, a beskonačni proces stvorio je jaz između aritmetike i geometrije. Zato su se grčki matematičari opredijelili za geometriju, razvijajući je do takvih granica da se godinama gotovo ništa novo nije moglo dodati njihovim rezultatima.

U 17. stoljeću dolazi do važnih otkrića u matematici, kada se o pojmu beskonačnosti počinje govoriti u pravom matematičkom smislu. Isaac Newton (1643. – 1727.) i Gottfried Leibniz (1646. – 1727.) smatraju se tvorcima diferencijalnog i integralnog računa, a osnova tih dijelova matematike su beskonačni procesi. Razvojem ovog područja matematike, beskonačnost postaje važan pojam bez kojeg puno toga ne bi imalo smisla. Recimo još da je znak beskonačnonsti ∞ uveo Wallis 1665. godine. Problem u vezi s pojmom beskonačnosti vraća se i u novije vrijeme kada su Dedekind i Cantor razvili teoriju beskonačnih skupova.

3. Istraživanja o shvaćanju pojma beskonačnosti

Nevelik broj istraživanja ispitivao je razumijevanje i poteškoće koje učenici imaju s pojmovima beskonačnosti i limesa. Promatrani su različiti aspekti učenja tih pojmova i njihova povezanost, no ovo područje još uvijek je dosta neistraženo.

Neka istraživanja ispitivala su kako učenici zaključuju u zadatcima u kojima se pojavljuje beskonačnost, poput beskonačnih nizova, a istraživači u ovom aspektu ističu važnost i ulogu intuicije koja je često izvor lošeg razumijevanja.

Neki pak istraživači naglašavaju važnost jezika. Svakodnevni jezik može ometati matematičko razumijevanje jer učenici mogu imati mnogo iskustva s pojmovima kao što su granice, ograničenja brzine, minimalna plaća, a ti pojmovi (minimalan ili ograničenje) u matematičkom okruženju imaju drugačije značenje. Značajan utjecaj na shvaćanje beskonačnosti ima prikaz pojma limesa niza ili funkcije, na koju se učenici i studenti oslanjaju više nego na samu definiciju tih pojmova.

Učenici se u školi susreću s pojmom beskonačnosti najvećim dijelom u četvrtom razredu srednje škole, u gimnazijama i nekim tehničkim školama, a tijekom studija taj pojam susreću mnogi studenti prirodnih i tehničkih studija u temama kao što su, primjerice, limesi, asimptotsko ponašanje racionalnih funkcija, beskonačni nizovi i redovi itd. Unatoč broju tema vezanih uz beskonačnost, učenici i studenti često se muče s njihovim razumijevanjem.

Uočavajući opisano stanje želja nam je bila istražiti kako pojam beskonačnosti razumiju (ili ne razumiju) sadašnji studenti i učenici završnog razreda srednje škole. Stoga smo pred njih postavili problem teniskih loptica iz kojeg se može jasno vidjeti kako shvaćaju pojam beskonačnosti.

3.1. Problem teniskih loptica

U ovome potpoglavlju detaljnije ćemo razmatrati ranije spomenuti problem teniskih loptica jer smo na njemu proveli istraživanje. Slična problematika razmatrana je u [6], no mi nismo ponudili odgovore na postavljena pitanja, nego smo od učenika i studenata tražili da napišu svoj zaključak.

Problem. *Pretpostavimo da imamo beskonačno mnogo teniskih loptica označenih brojevima 1,2,3... i dvije posude neograničenog kapaciteta, označene s A i B. U prvom koraku uzmemo loptice označene s 1 i 2, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 1 premjestimo u posudu B. U drugom koraku uzmemo loptice označene s 3 i 4, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 2 premjestimo u posudu B. U trećem koraku uzmemo loptice označene s 5 i 6, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 3 premjestimo u posudu B. Taj proces ponovimo n puta. Koliko će tada loptica biti posudi A, a koliko u posudi B?*

Zatim, pretpostavimo da gore opisane postupke ponovimo beskonačno puta. Koliko će loptica u ovom slučaju sadržavati posuda A, a koliko posuda B nakon što izvršimo sve korake?

Problem teniskih loptica sam je po sebi beskonačan iterativni proces koji je naizgled paradoksalan. U ovome slučaju postavljena su dva pitanja. Prvo pitanje odnosilo se na izvršavanje konačnog broja ponavljanja, tj. n koraka koje dovodi do jedinog mogućeg zaključka, a to je da će broj loptica u posudama A i B biti jednak, odnosno n.

Drugo pitanje odnosilo se na izvršavanje beskonačno koraka, tj. ponavljanje procesa beskonačno puta. U slučaju beskonačnog ponavljanja paradoks se pojavljuje zbog dva različita shvaćanja problema od kojih su naizgled oba točna.

Prvo razmišljanje temelji se na broju loptica u posudama A i B te se u svakom koraku broj loptica u obje posude povećava za jednu u odnosu na prethodni korak (vidi tablicu 1). Dakle, u svakom konačnom koraku obje posude sadrže jednak broj loptica, što dovodi do zaključka da će i nakon svih beskonačno koraka posuda A i posuda B sadržavati svaka po beskonačno loptica.

Korak	Broj loptica u posudi A	Broj loptica u posudi B
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
...	...	...
n	n	n
...	...	...
∞	∞	∞

Tablica 1. Prvo razmišljanje

Drugo razmišljanje prati brojeve na lopticama, odnosno što se točno događa sa svakom pojedinom lopticom (vidi tablicu 2). Naime, svaka loptica u nekom koraku prijeđe iz posude A u posudu B. Iz tablice 2 možemo vidjeti da će prva loptica u posudi B biti nakon prvog koraka, druga nakon drugog koraka, a n-ta loptica nakon n-tog koraka. Dakle, svaka će loptica u nekom konačnom koraku biti premještena iz posude A u posudu B, što dovodi do zaključka da će nakon svih beskonačno koraka posuda A biti prazna, a posuda B sadržavati svih beskonačno loptica.

Korak	Popis loptica u posudi A	Popis loptica u posudi B
1	2	1
2	3, 4	1, 2
3	4, 5, 6	1, 2, 3
4	5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4
...	...	...
n	$n + 1, n + 2, ..., 2n$	$1, 2, ..., n$
...	...	...
∞	0	∞

Tablica 2. Drugo razmišljanje

Naravno da je samo jedno od ovih razmišljanja točno. Točno je da je posuda *A* po završetku svih koraka prazna. Samo drugo razmišljanje u potpunosti uzima u obzir način provođenja iterativnog procesa premještanja loptica. Kao što smo već naveli, nakon bilo kojeg konačnog broja koraka rezultati dobiveni prvim i drugim shvaćanjem se podudaraju (u obje je posude jednak broj loptica), ali samo drugo razmišljanje daje pravi odgovor na pitanje što će se dogoditi kada se izvrši svih beskonačno koraka. To je zato jer prvo razmišljanje, brojeći samo broj loptica, ali ne i koje su loptice u kojoj posudi, gubi ključnu informaciju o tome da se svaka loptica kad-tad premjesti u posudu *B*.

Problem smo ovako postavili s ciljem da ova dva razmišljanja, koja daju isti odgovor za svaki konačni korak iterativnog procesa, daju različite rezultate cjelokupnog beskonačnog iterativnog procesa.

3.2. Anketa

Anketa je sadržavala gore opisani problem teniskih loptica, s dva postavljena pitanja na koja su učenici i studenti trebali dati svoj odgovor u opisnom obliku. Od njih se zahtijevalo da pročitaju navedeni problem, daju odgovor i ukratko ga obrazlože. Anketa je bila anonimna, a od učenika i studenata tražilo se jedino da navedu koju školu ili fakultet polaze, svoj razred ili smjer, spol te dob. Ti su podatci bili potrebni zbog lakše analize i usporedbe rezultata ankete. Osobito nam je važno bilo uočiti postoji li razlika u razmišljanju i shvaćanju pojma beskonačnosti između ispitanih učenika i studenata.

U anketi je sudjelovalo 27 učenika 4. razreda Opće gimnazije „Matija Mesić" u Slavonskom Brodu, 29 učenika 4. razreda Prirodoslovno-matematičke gimnazije „Matija Mesić" u Slavonskom Brodu, 30 studenata 1. godine i 23 studenta 4. godine Sveučilišnog Odjela za matematiku u Osijeku. Anketu je ispunilo 109 ispitanika.

3.3. Rezultati ankete

Rezultate ćemo komentirati za svako od postavljenih pitanja na razini smjera u srednjoj školi i godine na fakultetu.

Rezultati učenika Opće gimnazije pokazali su nam da je većina učenika razumjela prvo pitanje i dala točan odgovor na njega. Međutim, u dijelu tih odgovora nije bio naveden točan broj loptica (n) nego su samo zaključili da će u obje posude biti jednak broj loptica. Dio učenika nije shvatio da se proces ponavlja n puta, dok neki uopće nisu komentirali prvo pitanje. Na drugo pitanje nitko od učenika nije dao točan odgovor. Većina učenika napravila je prijelaz u beskonačno, tj. poopćila je konačan broj loptica n na beskonačno loptica. Ti učenici pretpostavili su da će, ako je jednak broj loptica u konačnom koraku, jednak broj loptica biti i nakon beskonačno koraka, odnosno da će biti beskonačno loptica u obje posude. Neki učenici naveli su da „ne znamo dokle se beskonačno proteže".

Odgovori učenika Matematičke gimnazije na postavljeno prvo pitanje podudaraju se s rezultatima učenika Opće gimnazije te su i oni većinom točno odgovorili. Zanimljivo je bilo primijetiti kako je jedan broj učenika, iako neuspješno, pokušao izvesti formulu za dani problem, iz čega se može zaključiti da oni imaju donekle razvijeno matematičko mišljenje. Učenici se trude problem iz stvarnog života prevesti na matematički jezik. Većina odgovora koji nisu bili točni dogodila se zbog previda da se broj ponavljanja koraka ne podudara s brojem loptica koje se nalaze u posudama u nekom koraku. U ovom razredu jedan je učenik, bez detaljnijeg objašnjenja, ipak dao točan odgovor na drugo pitanje i naveo da će u posudi A biti 0, a u posudi B beskonačno loptica. Ostali učenici poopćili su konačan slučaj na beskonačan i zaključili da će u obje posude biti beskonačno loptica (Slika 2), dok se jedan broj njih susreće s problemom shvaćanja pojma beskonačnosti. Jedan učenik navodi da „o „beskonačnom broju" loptica nema smisla razmišljati jer beskonačno nije broj nego pojam, pa tako ne bi bilo smisla da u posudi bude „pola od beskonačno" loptica jer je to opet beskonačno".

Problem teniskih loptica

Pretpostavimo da imamo beskonačno teniskih loptica označenih brojevima 1,2,3,... i dvije posude neograničenog kapaciteta, označene s A i B.
U prvom koraku uzmemo loptice označene s 1 i 2, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 1 premjestimo u posudu B.
U drugom koraku uzmemo loptice označene s 3 i 4, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 2 premjestimo u posudu B.
U trećem koraku uzmemo loptice označene s 5 i 6, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu ozančenu s 3 premjestimo u posudu B .
Taj proces ponovimo *n* puta. Koliko će tada loptica biti posudi A, a koliko u posudi B?

U posudi A i posudi B će biti jednak broj loptica.
U svakoj n loptica.

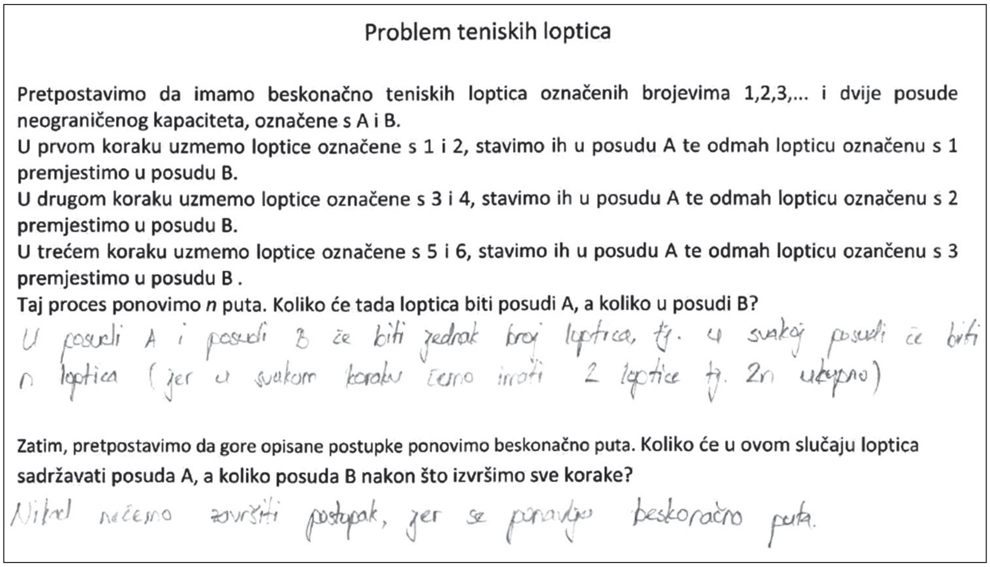
Zatim, pretpostavimo da gore opisane postupke ponovimo beskonačno puta. Koliko će u ovom slučaju loptica sadržavati posuda A, a koliko posuda B nakon što izvršimo sve korake?

Ako postupak ponavljamo beskonačno puta nikad nećemo izvršiti sve korake.

Slika 2. Odgovor jednog učenika

Među studentima prve godine Odjela za matematiku primijećeno je da su s prvim pitanjem imali velikih problema. Većina studenata netočno je odgovorila na prvo pitanje, iako ono ne zahtijeva opsežno matematičko predznanje. Ti studenti nisu obraćali pažnju na činjenicu da postupak započinje ubacivanjem dviju loptica u posudu A, što nakon n koraka dovodi do toga da ukupno u posudama imamo $2n$ loptica. Većina ih je pretpostavila da je ukupan broj loptica n (zbog broja koraka), pa su prema tome zaključili da svaka posuda ima $\frac{n}{2}$ loptica. Kao i kod prethodnih ispitanika, velika većina odgovora na drugo pitanje je netočna. Ipak, u ovoj skupini postoji nekoliko točnih odgovora koje možemo podijeliti u dvije grupe. Dva odgovora bila su u potpunosti točna i studenti su zaključili da posuda A neće sadržavati nijednu lopticu, a u posudi B bit će sve loptice. Zanimljivo je da su dva studenta krivo odredila kada postupak završava pa su djelomično dobro odgovorila na postavljeno pitanje. Dobro su zaključili da će se kad-tad sve loptice iz posude A premjestiti u posudu B te da će posuda B sadržavati beskonačno loptica, ali su pogrešno shvatili kada završava postupak premještanja loptica te su zaključili da u posudi A ostaju zadnje dvije loptice i tako im je zadnji korak ostao nedovršen.

Studenti četvrte godine Odjela za matematiku u najvećem su broju točno odgovorili na prvo pitanje, a svi netočni odgovori nastali su iz istog razloga kao i kod studenata prve godine. Na drugo pitanje nitko od anketiranih studenata nije točno odgovorio. Mora se naglasiti da velika većina smatra da se nešto – ako je beskonačno – ne može izvršiti. Većina odgovora bila je slična ovima: „Nemoguće je izvršiti sve korake jer postupak ponavljamo beskonačno puta.", „Nikad nećemo završiti postupak jer se ponavlja beskonačno puta" (Slika 3). Ovo nas dovodi do zaključka da velik broj studenata, čak i na četvrtoj godini matematičkog fakulteta, ne razumije jedan od temeljnih matematičkih pojmova kao što je pojam *limesa niza* koji nam upravo govori da neki beskonačni iterativni procesi mogu završiti.



Problem teniskih loptica

Pretpostavimo da imamo beskonačno teniskih loptica označenih brojevima 1,2,3,... i dvije posude neograničenog kapaciteta, označene s A i B.
U prvom koraku uzmemo loptice označene s 1 i 2, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 1 premjestimo u posudu B.
U drugom koraku uzmemo loptice označene s 3 i 4, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu označenu s 2 premjestimo u posudu B.
U trećem koraku uzmemo loptice označene s 5 i 6, stavimo ih u posudu A te odmah lopticu ozančenu s 3 premjestimo u posudu B .
Taj proces ponovimo *n* puta. Koliko će tada loptica biti posudi A, a koliko u posudi B?

U posudi A i posudi B će biti jednak broj loptica, tj. u svakoj posudi će biti n loptica (jer u svakom koraku ćemo imati 2 loptice tj. 2n ukupno)

Zatim, pretpostavimo da gore opisane postupke ponovimo beskonačno puta. Koliko će u ovom slučaju loptica sadržavati posuda A, a koliko posuda B nakon što izvršimo sve korake?

Nikad nećemo završiti postupak, jer se ponavlja beskonačno puta.

Slika 3. Odgovor jednog studenta

Analizirajući odgovore dobivene u ovoj anketi uočavamo da su i učenici i studenti na prvo pitanje većinom dali točan odgovor. Zanimljivo je da su studenti (osobito prve godine) griješili u pretpostavci koliki je ukupan broj loptica u posudama nakon n koraka. Pri odgovaranju na drugo pitanje velik broj i učenika i studenata napravio je prijelaz u beskonačno, tj. poopćio je konačan broj loptica n na beskonačno loptica. Samo je troje anketiranih ispitanika točno odgovorilo na drugo pitanje, no to je bilo i za očekivati. Najviše iznenađuje činjenica da velik broj studenata matematike ne razumije pojam *beskonačnost iterativnog procesa* ili ga možda u ovom problemu uopće nisu prepoznali.

4. Vratimo se na početak

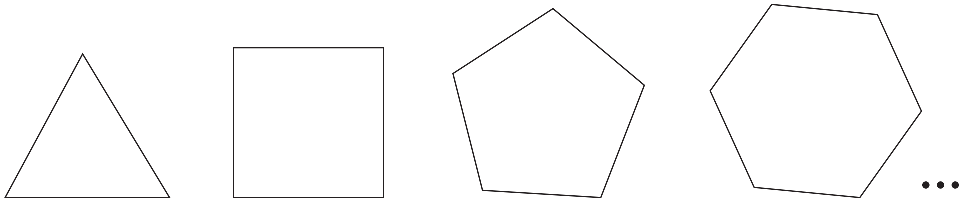
Beskonačnost je, zapravo, jedan od centralnih pojmova u matematici i filozofiji. Zanimljivo je da pojam beskonačnosti nema samo jedno značenje, već u različitim kontekstima ima drugačija značenja. Promotrimo, primjerice, niz prirodnih brojeva 1, 2, 3... i razmišljajmo o daljnjem brojenju. U procesu prebrojavanja nema ograničenja, nema krajnje točke. Takve procese bez kraja nazivamo *potencijalnom* beskonačnošću. U matematici su upravo takvi neograničeni procesi učestali, primjerice, crtanje pravilnih mnogokuta s više i više stranica unutar kruga, ili brojenje decimala broja π. No, zanimljiviji slučaj u matematici javlja se kad se beskonačnost poima kao nešto ostvareno, realizirano. To je takozvana *stvarna* beskonačnost. Skup svih prirodnih brojeva primjer je stvarne beskonačnosti jer to od nas zahtijeva da poimamo potencijalno beskonačan proces prebrojavanja sve više i više brojeva kao da je na neki način završen. Upravo ovakvi procesi koji se iteriraju stvaraju konceptualnu bazu za mnoge slučajeve stvarne beskonačnosti. Postoji i *ordinalna* beskonačnost koja predstavlja korespondenciju između beskonačnih skupova. A u nestandardnoj analizi javlja se i nestandardna beskonačnost koja dopušta sve aritmetičke operacije, pa čak i dijeljenje kako bi nastali infinitezimali (beskonačno male veličine).

Da bi učenici i studenti mogli riješiti gore opisani *Problem teniskih loptica*, moraju biti u stanju poimati beskonačni iterativni proces kao da je u jednom trenu završen. To je na neki način sagledavanje ukupnosti, totalnosti beskonačnog procesa, nakon čega se proces doživljava kao objekt.

Za bolje razumijevanje pojma beskonačnosti dobro je proći kroz nekoliko različitih primjera kao što su uspoređivanje beskonačnih skupova, određivanje limesa niza i konstruiranje beskonačnih iterativnih procesa. Takvi primjeri korisni su upravo za razvoj različitih značenja pojma beskonačnosti.

Sljedeći primjer pokazuje kako učenicima osvijestiti pojam završenog beskonačnog procesa i transcendentnog objekta. Zamislimo niz koji čine pravilni mnogokuti. Niz započinje jednakostraničnim trokutom, zatim slijedi kvadrat, a u svakom sljedećem koraku nastaje neki pravilni mnogokut redom kako se povećava broj stranica mnogokuta.

Od učenika se može tražiti da opišu što je rezultat svakog koraka ovog procesa i da predlože krajnji rezultat. Ovo bi moglo potaknuti različite ideje, a najvjerojatnije je da će učenici zaključiti da je krajnji rezultat ovog procesa krug. Taj objekt ne može nastati niti u jednom koraku ovog procesa i zbog toga se može shvatiti kao transcendentni objekt za ovaj niz.



Slika 4. Niz mnogokuta

Literatura:

1. Brown, A., McDonald, M. A., Weller, K, *Step by step: infinite iterative processes and actual infinity*, u F. Hitt, D. Holton & P. Thompson, Research in Collegiate Mathematics Education VII, 2010.
2. G. Donald Allen, *The History of Infinity*, Department of Mathematics, Texas A&M University College Station
3. F. M. Brueckler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek, 2007.
4. F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek, 2010.
5. D. Paukner Stojkov, *Pogled u beskonačnost*, Matematika i škola 10 (2001.), 211-212
6. I. Toplek, N. Grbac, T. Galinac Grbac, *O shvaćanju pojma beskonačnosti i graničnih procesa*, Poučak 52 (2012.), 6-16.
7. E. Dubinsky, K. Weller, C. Stringer, D. Vidakovic, *Infinite iterative processes: the tennis ball problem*, Eur. J. Pure Appl. Math 1 (2008.), 99-121.