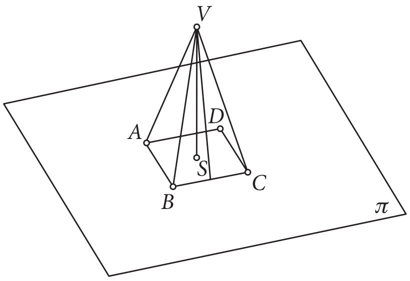
Obujam piramida i stožaca

Vladimir Ćepulić[1], Marijana Greblički[2]

1. Obujam četverostrane pravilne piramide

Podsjetimo se o kakvom se geometrijskom tijelu ovdje radi.

Neka je ($ABCD$) četvorina (kvadrat) u ravnini Π s duljinom stranice jednakom $\boldsymbol{a} = d(A,B) = d(B,C) = d(C,D) = d(D,A)$ i V točka izvan Π, kojoj je nožište okomice na ravninu Π središte S četvorine ($ABCD$). Skup svih točaka na spojnicama točaka četvorine ($ABCD$) s točkom V zajedno s ($ABCD$) tvori geometrijski lik koji zovemo četverostranom pravilnom piramidom. Označimo ju s ($ABCDV$). Pri tome se četvorina ($ABCD$) zove osnovka (baza) piramide, trokuti ΔABV, ΔBCV, ΔCDV i ΔDAV strane ili pobočke, a točka V vrh piramide. Duljina dužine SV, što je ujedno udaljenost točke V od ravnine Π, zove se visina piramide i označuje s $\boldsymbol{v} = d(S,V)$. (Slika 1.)



Slika 1.

U školi smo učili da je obujam V takve piramide jednak

$$V = \frac{\boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{v}}{3}, \tag{1}$$

dakle jednak je trećini obujma kvadra s jednakom osnovkom i jednakom visinom kao piramida.

Nisu nam, međutim, rekli zašto je to tako. Istina je, to se može lako pokazati pomoću integralnoga računa koji smo uglavnom učili na različitim studijima. No zar

[1]Vladimir Ćepulić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

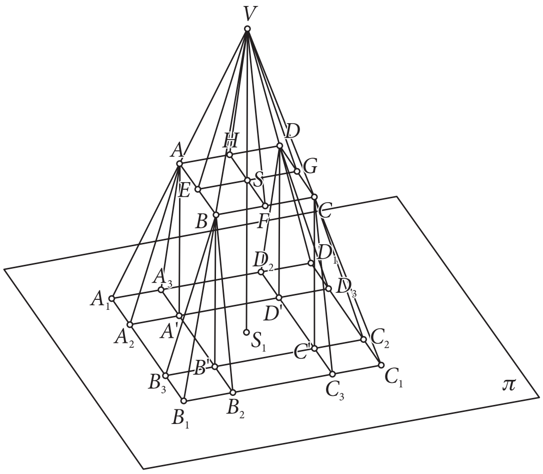
[2]Marijana Greblički, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb

je moguće da se takva temeljna činjenica ne da dokazati bez toga velebnog znanja, iznašašća Leibniza i Newtona u 17. stoljeću? Sigurno da može i da je ta činjenica već dugo znana i na različite načine dokazivana.

Pitali smo o tome više kolega matematičara, ali nitko od njih nije znao za neki drugi dokaz. Počeli smo o tome razmišljati i nakon nekog se vremena razveselili našavši jedan put do rješenja. Matematiku doživljavamo kao jednu krasnu zemlju, raznolikih krajolika, tek malim dijelom istraženu. Pristup pojedinoj njezinoj činjenici, koja se možda izdaleka tek nazire, ostvaruje se dokazivanjem. Kao što se zemljopisnim objektima može pristupiti s različitih strana, različitim putevima, tako se često i matematičke činjenice mogu dokazivati na različite načine. Ali rezultat je uvijek isti – one su istinite. Matematičko razmišljanje velik je dar čovjeku da se može diviti ljepoti matematičkih istina i snalaziti se u svijetu koji mu je dom.

Evo, dakle, puta koji smo uočili.

Produljimo bridove $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$ i $\overline{VD}$ preko točaka A, B, C, D na dvostruku veličinu. (Slika 2.)



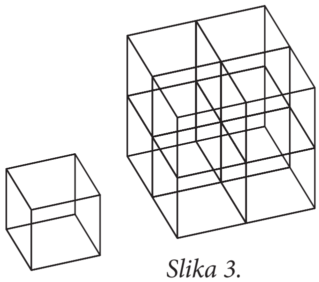
Slika 2.

Tako dobivamo točke A_1, B_1, C_1, D_1 za koje vrijedi:

$$d(V,A_1)=d(V,B_1)=d(V,C_1)=d(V,D_1)=2d(V,A)=2d(V,B)=2d(V,C)=2d(V,D)$$

i veću piramidu ($A_1B_1C_1D_1V$) kojoj su elementi u sve tri dimenzije dvostruko veći od onih u polaznoj piramidi ($ABCDV$). Takvom dilatacijom („proširbom”) svaki element obujma povećava se $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ puta (Slika 3.)

Stoga je i obujam (volumen) $V_{(A_1B_1C_1D_1V)}$ veće piramide 8 puta veći od obujma $V_{(ABCDV)}$ polazne piramide, tj.



Slika 3.

$$V_{(A_1B_1C_1D_1V)} = 8 \cdot V_{(ABCDV)} \,, \tag{2}$$

ili kraće, uz odgovarajuću preinaku oznaka V u $\mathcal{V}$ i izostavljanje oznaka točaka:

$$\mathcal{V}_1 = 8 \cdot \mathcal{V} \,. \tag{2'}$$

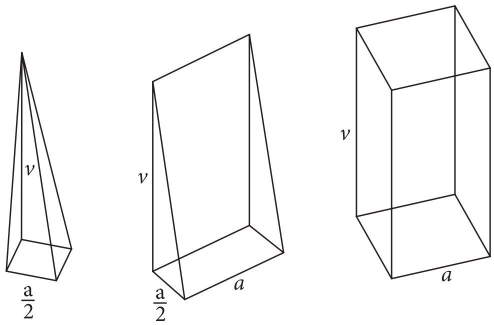
Sada ćemo veću piramidu razdijeliti na dijelove, što će nam omogućiti da izračunamo traženi obujam (Slika 2. i Slika 4.).

Neka su (ortogonalne) projekcije točaka A, B, C, D na ravninu $\Pi_1 = (A_1B_1C_1D_1)$ točke A', B', C', D' pripadice. Dobili smo kvadar $(A'B'C'D'ABCD)$. Ravnine kroz okomite strane toga kvadra $(ABA'B')$, $(BCB'C')$, $(CDC'D')$ i $(DAD'A')$ sijeku stranice A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 u točkama A_2 i B_3, B_2 i C_3, C_2 i D_3 , te D_2 i A_3 pripadice. Označimo još polovišta stranica AB, BC, CD i DA po redu s E, F, G i H, a središte četvorine $(A_1B_1C_1D_1)$, koje je projekcija središta S, oznakom S_1 (Slika 2.).

Na temelju ove konstrukcije i s razloga simetrije, vidimo da je:

$$d(A_1,B_1) = d(B_1,C_1) = d(C_1,D_1) = d(D_1,A_1) = 2\boldsymbol{a};$$
$$d(A',B') = d(B',C') = d(C',D') = d(D',A') = \boldsymbol{a};$$
$$d(A_2,B_3) = d(B_2,C_3) = d(C_2,D_3) = d(D_2,A_3) = \boldsymbol{a};$$
$$d(A',A_2) = d(A',A_3) = d(B',B_2) = d(B',B_3) = d(C',C_2) = d(C',C_3) = d(D',D_2) = d(D',D_3) = \frac{\boldsymbol{a}}{2}$$
$$= d(E,S) = d(F,S) = d(G,S) = d(H,S);$$
$$d(A',A) = d(B',B) = d(C',C) = d(D',D) = d(S_1,S) = d(S,V) = \boldsymbol{v}.$$

Iz sl. 2. vidimo da se cijela veća piramida $(A_1B_1C_1D_1V)$ razlaže u ovakve dijelove (Slika 4.):



Slika 4.

1) polaznu piramidu $(ABCDV)$
2) kvadar $(A'B'C'D'ABCD)$ osnovke ploštine $\boldsymbol{a}^2$, visine $\boldsymbol{v}$ i obujma $V_{KV} = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{v}$.
3) četiri trokutne prizme: $(A_2B_3A'B'AB)$, $(B_2C_3B'C'BC)$, $(C_2D_3C'D'CD)$, $(D_2A_3D'A'DA)$ s pravokutnim trokutnim osnovkama, katetama duljina $\frac{\boldsymbol{a}}{2}$ – $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$, $D'D_2$

i $\boldsymbol{v}$ – $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$, širinama duljine $\boldsymbol{a}$ – A_2B_3, B_2C_3, C_2D_3, D_2A_3 , te obujama

$$V_{PRIZ} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v}}{4}$$

4) četiri jednake manje piramide ($A_1A_2A'A_3A$), ($B_1B_2B'B_3B$), ($C_1C_2C'C_3C$) i ($D_1D_2D'D_3D$) koje su sukladne četirima piramidama: ($AESHV$), ($BFSEV$), ($CGSFV$) i ($DHSGV$) koje tvore polaznu piramidu ($ABCDV$), svaka obujma V_{PIR}, pri čemu je $\mathcal{V} = 4\cdot V_{PIR}$.

Sada možemo prijeći na izračun obujma $\mathcal{V}$ polazne piramide. Iz (2) i opisane razložbe veće piramide na dijelove imamo da je:

$$\mathcal{V}_1 = 8\cdot\mathcal{V} = V_{KV} + 4\cdot V_{PRIZ} + 4\cdot V_{PIR} + \mathcal{V} = \boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v} + 4\cdot\frac{\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v}}{4} + \mathcal{V} + \mathcal{V}\text{, tj.}$$

$$8\cdot\mathcal{V} = 2\cdot\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v} + 2\cdot\mathcal{V}\text{, dakle}$$

$$6\cdot\mathcal{V} = 2\cdot\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v}\text{, a odavde slijedi}$$

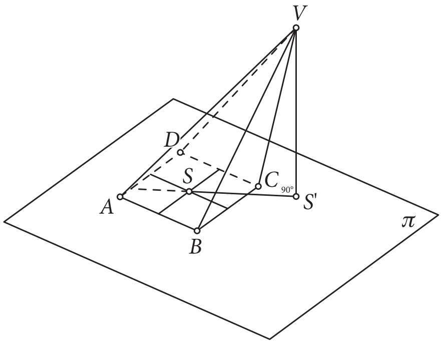
$$\mathcal{V} = \frac{\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v}}{3}, \tag{3}$$

tj. formula za obujam piramide.

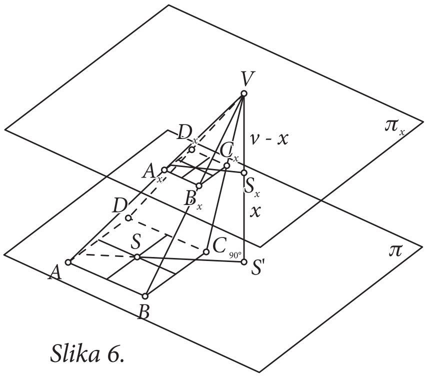
2. Obujam općenite piramide kojoj je osnovka četvorina

Neka je ($ABCDV$) općenita četverostrana piramida kojoj je osnovka četvorina ($ABCD$) stranice duljine $\boldsymbol{a}$ u ravnini Π, a vrh bilo koja točka V izvan ravnine Π, kojoj je udaljenost od te ravnine, tj. od njezine ortogonalne projekcije S' na ravninu, jednaka $\boldsymbol{v}$. Tada se $\boldsymbol{v}$ zove visina te piramide. (Slika 5.)

Neka je Π_x ravnina usporedna s ravninom Π i od nje udaljena za x, pri čemu je $\boldsymbol{x}$ realan broj iz intervala $(0, \boldsymbol{v})$. (Slika 6.)



Slika 5.



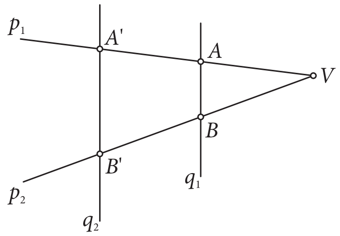
Slika 6.

Tada presjek piramide ($ABCDV$) s ravninom Π_x ima ploštinu $\mathcal{B}_x$ koja se spram ploštine $\boldsymbol{a}^2$ osnovke piramide ($ABCDV$) odnosi kao i kvadrati pripadnih visina, tj.

$$\mathcal{B}_x : \boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})^2 : \boldsymbol{v}^2\,. \tag{4}$$

Naime, to se jednostavno pokazuje primjenom Talesovog poučka o proporcionalnosti u pramenu pravaca koji nam kaže: ako se dva pravca p_1 i p_2 sijeku u točki V i ako su oni presječeni usporednim pravcima q_1 i q_2, pri čemu je $p_1 \cap q_1 = A$, $p_1 \cap q_2 = A'$, $p_2 \cap q_1 = B$, $p_2 \cap q_2 = B'$, onda vrijedi (Slika 7.)

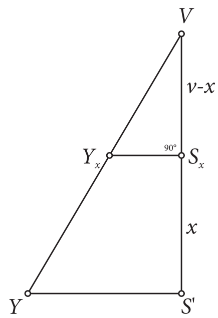
$$\frac{|VA|}{|VA'|} = \frac{|VB|}{|VB'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} \quad . \tag{5}$$



Slika 7.

Primijenimo navedeni poučak na piramidu $(ABCDV)$ i piramidu $(A_xB_xC_xD_xV)$ koju dobivamo presjekom piramide $(ABCDV)$ ravninom Π_x.

Odaberemo bilo koji od bridova YV, $Y \in \{A, B, C, D\}$ piramide $(ABCDV)$ i visinu $S'V$. Na taj način dobivamo trokut (VYS') i presječni trokut (VY_xS_x) dobiven presjekom (VYS') ravninom Π_x. (Slika 7. i 8.)



Slika 8.

Budući da su stranice YS' i Y_xS_x usporedne, prema Talesovom poučku (v. (5)) vrijedi

$$\frac{|VY_x|}{|VY|} = \frac{|VS_x|}{|VS'|} = \frac{\boldsymbol{v-x}}{\boldsymbol{v}}, \text{ pri čemu je } Y \in \{A, B, C, D\},$$

odakle je

$$\frac{|VA_x|}{|VA|} = \frac{|VB_x|}{|VB|} = \frac{|VC_x|}{|VC|} = \frac{|VD_x|}{|VD|} = \frac{\boldsymbol{v-x}}{\boldsymbol{v}}.$$

Sada prema Talesovom poučku za pobočke (VAB), (VBC), (VCD), (VDA) presječene ravninom Π_x (Slika 6.) vrijedi da je

$$\frac{|A_xB_x|}{|AB|} = \frac{|VA_x|}{|VA|} = \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}}$$

i analogno za B_xC_x, C_xD_x, D_xA_x

$$\frac{|B_xC_x|}{|BC|} = \frac{|C_xD_x|}{|CD|} = \frac{|D_xA_x|}{|DA|} = \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}},$$

Iz $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = \boldsymbol{a}$ slijedi da su stranice

$$|A_xB_x| = |B_xC_x| = |C_xD_x| = |D_xA_x| = \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}},$$

te je $(A_xB_xC_xD_x)$ romb, a budući da su $A_xB_x \parallel AB$, $C_xD_x \parallel CD$ i $AB \parallel CD$, onda je i $A_xB_x \parallel C_xD_x$, pa je taj romb četvorina.

Ploština presjeka $(A_xB_xC_xD_x)$ piramide $(ABCDV)$ ravninom Π_x je, dakle,

$$\mathcal{B}_x = P_{(A_xB_xC_xD_x)} = (A_xB_x)^2 = \boldsymbol{a}^2\cdot\left(\frac{v-x}{v}\right)^2, \qquad (*)$$

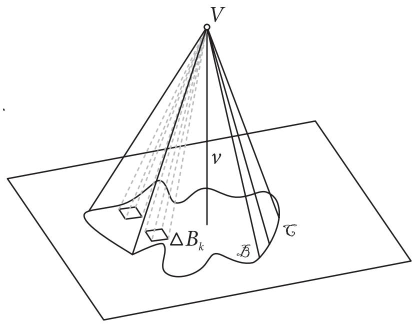
te ovisi samo o stranici $\boldsymbol{a}$ osnovke, visini $\boldsymbol{v}$ i udaljenosti $\boldsymbol{x}$ presječne ravnine Π_x od ravnine osnovke Π, pa je jednaka za sve takve piramide jednakih četvrtastih osnovaka i jednakih visina.

Sada primijenimo Cavalierievo načelo koje kaže: ako dva tijela siječemo skupom svih usporednih ravnina, te ako su ploštine obaju presjeka za svaku od tih ravnina međusobno jednake, onda su jednaki i obujmi tih dvaju tijela. Dakle su poradi (*) obujmi svih piramida četvrtaste osnovke stranice $\boldsymbol{a}$ i visine $\boldsymbol{v}$ međusobno jednaki, dakle i jednaki obujmu takve uspravne pravilne četverostrane piramide koja je i sama jedna od njih. Stoga je obujam bilo koje od tih piramide po (3) uvijek jednak

$$\mathcal{V} = \frac{\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{v}}{3}. \qquad (6)$$

3. Obujam općenitog stošca

Neka je dana jednostavna zatvorena krivulja $\mathcal{C}$ u ravnini Π, koja sebe ne presijeca i omeđuje zatvoreno područje, i neka je točka V bilo koja točka izvan ravnine Π na udaljenosti $\boldsymbol{v}$ od te ravnine (tj. od njezine ortogonalne projekcije na ravninu Π). Skup svih točaka na pravcima kroz sve točke krivulje $\mathcal{C}$ i kroz točku V čine plašt geometrijskog tijela koji zajedno s dijelom ravnine Π omeđenim krivuljom $\mathcal{C}$, i točkom V nazivamo općeniti stožac i označujemo s $(\mathcal{C},V)$. Sukladno tome obujam općenitog stošca označujemo $\mathcal{V}ST$. Svaki pravac kroz bilo koju točku T krivulje $\mathcal{C}$ i točku V naziva se izvodnica stošca. Područje $\mathcal{B}$ omeđeno krivuljom $\mathcal{C}$ ploštine $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ naziva se osnovka, dok se $\boldsymbol{v}$ naziva visina općenitog stošca. (Slika 9.)



Slika 9.

Sada osnovku podijelimo na n, $n \in \mathbb{N}$, četvorina ploštine $\Delta \mathcal{B}_k$, $k = 1, \ldots, n$ pripadice. Spajajući svaku četvorinu s vrhom V na prije opisani način konstruiramo četverostrane piramide s osnovkama ploština $\Delta \mathcal{B}_k$ i visinama $\boldsymbol{v}$ pripadnih obujama (prema (6))

$$V_k = \frac{\Delta \mathcal{B}_k \cdot v}{3}, \text{ za } k = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Zbrajanjem svih dobivenih obujama piramida V_k i profinjenjem podjele osnovke na način podjele na „sve više" četvorina koje sve potpunije pokrivaju područje $\mathscr{B}$, tj. u konačnici djelovanjem limesa kada n teži u $+\infty$, dobivamo da je obujam općenitog stošca $\mathcal{V}ST$ jednak

$$\mathcal{V}_{ST} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta \mathcal{B}_k \cdot \boldsymbol{v}}{3} = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathcal{B}_k \right) \cdot \frac{v}{3} = \frac{\mathcal{B} \cdot v}{3}. \tag{8}$$

Dakle, i za općeniti stožac vrijedi analogna formula

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \cdot v}{3}, \tag{9}$$

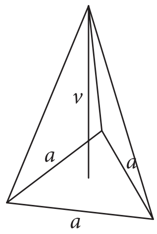
tj. obujam stošca jednak je trećini umnoška ploštine njegove osnovke i njegove visine.

Ovo vrijedi za sve stošce, uključujući i poseban slučaj piramida svih osnovaka – one su samo poseban slučaj općenitog stošca.

Navedimo, kao primjenu, još nekoliko primjera:

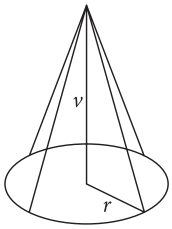
Primjer 1. Trostrana piramida s osnovkom istostraničnim trokutom,

$$\mathcal{V} = \frac{\boldsymbol{a}^2 \sqrt{3} \boldsymbol{v}}{4 \cdot 3} = \frac{\boldsymbol{a}^2 \sqrt{3} \boldsymbol{v}}{12}$$



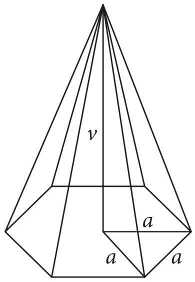
Slika 10.

Primjer 2. Kružni stožac, $V = \dfrac{\boldsymbol{r}^2\pi \boldsymbol{v}}{3}$



Slika 11.

Primjer 3. Šesterostrana piramida, $V = 6\dfrac{\boldsymbol{a}^2\sqrt{3}\boldsymbol{v}}{4 \cdot 3} = \dfrac{\boldsymbol{a}^2\sqrt{3}\boldsymbol{v}}{2}$



Slika 12.