Rođendanski paradoks

Josipa Matotek[1] i Ivanka Stipančić-Klaić[2]

Ključne riječi: rođendan, paradoks, vjerojatnost

Sažetak

Problem rođendana ili rođendanski paradoks problem je koji se pojavljuje u teoriji vjerojatnosti. Zanima nas vjerojatnost da u skupu od *n* slučajno odabranih ljudi postoji bar dvoje njih koji imaju rođendan istoga dana. Jasno je da će vjerojatnost takvog događaja biti 100 % kada je broj ljudi bar 366 (ako ne uključujemo datum 29. veljače). Međutim, pokazuje se da se vjerojatnost od 99.9 % dostiže već za 70 ljudi, a vjerojatnost od 50 % za 23 ljudi. Ove su vjerojatnosti izračunate pod pretpostavkom da svi datumi u godini imaju jednaku vjerojatnost za rođendan, stoga je datum 29. veljače isključen iz računa.

Rođendanski problem nije pravi paradoks u smislu da će nas dovesti do logičke kontradikcije, ali se naziva paradoksom zato što se matematički izračun u ovom slučaju suprotstavlja prirodnoj intuiciji. Stoga je ovaj problem izvrstan za provedbu projekta u nastavi matematike čiji će elementi biti opisani u ovome radu. Njegov je cilj učenike potaknuti na istraživanje, prikupljanje, obradu i prezentaciju podataka kroz timski rad.

1. Uvod

Povijesni podaci o nastanku rođendanskog paradoksa nisu do danas posve precizni. Richard von Mises je 1939. godine prvi proučavao problem sličan onome kakvim ga mi danas znamo. Međutim, postoje izvori (W.W. Rouse Ball, *Rekreacijska matematika i eseji)* koji govore da je prvi koji je diskutirao o ovom problemu zapravo Harold Davenport.

Treba istaknuti i velikog matematičara hrvatskog porijekla V. Srećka Fellera koji je u svojoj knjizi *Uvod u teoriju vjerojatnosti i primjene* također objašnjavao ovaj problem, a za tu knjigu neki današnji matematičari(1) navode da je još uvijek najbolje opisani uvod u ovu problematiku (i nešto širu, vezano uz Poissonove aproksimacije, ali to neće biti predmet ovoga članka).

[1]Josipa Matotek, Građevinski fakultet u Osijeku, Osijek
[2]Ivanka Stipančić-Klaić, Građevinski fakultet u Osijeku, Osijek

Rođendanski paradoks ili rođendanski problem, kako ga mnogi zovu, zapravo nije paradoks u pravom smislu te riječi, odnosno ne vodi nas nikakvoj logičkoj kontradikciji. Ime *paradoks* je dobio na osnovi toga što suprotstavlja ljudsku prirodnu intuiciju matematičkom izračunu. Mišljenje je da paradoks nastaje zato što naš mozak vjerojatnost prirodno prihvaća kao linearnu funkciju, ali ne i kao eksponencijalnu funkciju. (2)

Rođendanski je paradoks problem koji se pojavljuje u vjerojatnosti; traži se vjerojatnost da u grupi od n ljudi postoji bar dvoje ljudi koji imaju rođendan istoga datuma.

Konkretizirajmo problem. Neka je $n = 23$. Zanima nas kolika je vjerojatnost da u grupi od 23 ljudi bar dvoje njih ima rođendan istoga datuma. Označimo traženu vjerojatnost s $P(A)$. Radi jednostavnosti računa, u ovom ćemo članku zanemariti datum 29. veljače koji se pojavljuje svake prijestupne godine, a zanemarit ćemo i pojavu blizanaca. Poznato je da distribucija rođenih u godini nije uniformna, odnosno da se ljeti rađa više djece nego zimi, te da se početkom tjedna rađa više djece nego vikendom. Međutim, zanemarit ćemo i ta odstupanja i pretpostaviti da je svaki dan u godini jednako vjerojatan i da njegova vjerojatnost iznosi $\frac{1}{365}$. Ipak, jednostavnije je računati vjerojatnost suprotnog događaja, odnosno vjerojatnost da u grupi od 23 ljudi nema dvoje ljudi s istim rođendanom. Tu ćemo vjerojatnost označiti s $P(A^c)$. Budući da su događaji A i A^c međusobno disjunktni, vrijedi formula

$$P(A) = 1 - P(A^c). \tag{1}$$

U skupu od 23 ljudi možemo definirati 23 nezavisna događaja.Definirajmo ih redom i to tako da svaki događaj odgovara jednoj osobi koja ne dijeli rođendan ni s jednom osobom koja je ranije analizirana.

Za prvi događaj nemamo niti jednu osobu koja je ranije analizirana, stoga sa 100% sigurnošću možemo tvrditi da ta osoba ni s jednom osobom koja je ranije analizirana ne dijeli rođendan, tj. vjerojatnost tog događaja iznosi $P(1) = 1 = \frac{365}{365}$. U drugom događaju postoji samo jedna osoba koja je ranije analizirana, te će vjerojatnost da druga osoba s njom ne dijeli rođendan iznositi $P(2) = \frac{364}{365}$ jer smo iz skupa svih dana u godini isključili jedan dan u kojemu prva osoba ima rođendan. Sličnim razmatranjem dobit ćemo da je vjerojatnost da treća osoba nema rođendan kada i prve dvije dana formulom $P(3) = \frac{363}{365}$. Nastavimo li iterativno postupak sve do posljednje osobe u grupi (23.), dobit ćemo da je $P(23) = \frac{365-22}{365} = \frac{343}{365}$.

Iz prethodne analize možemo zaključiti da vjerojatnost $P(A^c)$ možemo opisati kao 23 nezavisna događaja, pri čemu svaki od njih odgovara jednoj osobi iz grupe od 23 ljudi.Tada $P\left(A^c\right)$ možemo izračunati kao umnožak vjerojatnosti svih $P\left(i\right)$, $i=1,\ldots,23$ događaja, tj.

$$P\left(A^c\right)=P\left(1\right)\times P\left(2\right)\times P\left(3\right)\times\ldots\times P\left(23\right)=1\times\left(1-\frac{1}{365}\right)\times\left(1-\frac{2}{365}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{22}{365}\right)$$

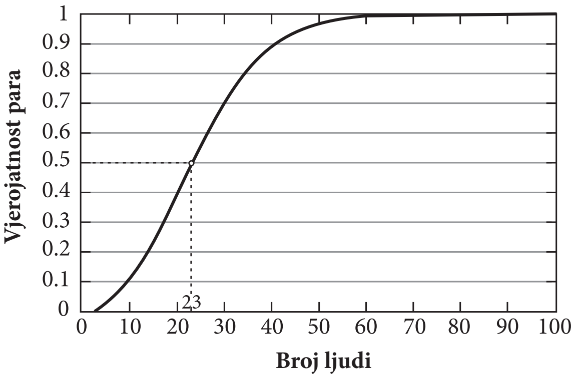
$$=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\ldots\times\frac{343}{365} \tag{2}$$

$$\Rightarrow P\left(A^c\right)\approx 0.492703. \tag{3}$$

Tada lako slijedi da je $P\left(A\right)\approx 1-0.492703=0.507297$.

Znači, vjerojatnost da u grupi od 23 ljudi bar dvoje ima rođendan istoga datuma iznosi 50.7297 %.

Kako smo već rekli, umjesto grupe od 23 ljudi, možemo promatrati grupu ljudi sa željenim brojem članova, *n*. Jasno, što je broj ljudi (*n*) veći, to će i tražena vjerojatnost rasti. Može se pokazati da je za *n* = 30, vjerojatnost 70.6 %, a za *n* = 70, vjerojatnost je već 99.9%. Ovaj rast najbolje prikazuje graf dan na Slici 1.



Slika 1. Prikaz izračunate vjerojatnosti da bar dvoje ljudi ima rođendan istoga datuma u grupi od n ljudi

Uočimo da smo za demonstraciju problema odabrali *n* = 23 zato što je to najmanji *n* za koji vjerojatnost traženog događaja prelazi 50 %.

Nadalje, uočimo da izraz $P\left(A^c\right)$ možemo zapisati i drugačije u terminima faktorijele

$$P\left(A^c\right)=\frac{1}{365^{23}}\times\frac{365!}{\left(365-23\right)!}. \tag{4}$$

Poopćimo sada dobivene formule. Neka je P' (*n*, *d*) vjerojatnost da dvoje ljudi u grupi od *n* ljudi nema rođendan istog datuma od *d* jednako mogućih rođendana. Sličnom razradom kao i za slučaj *n* = 23, *d* = 365, dobit ćemo

$$P'(n,d)=1\times\left(1-\frac{1}{d}\right)\times\left(1-\frac{2}{d}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{n-1}{d}\right)=\frac{d!}{(d-n)!d^n}. \tag{5}$$

Slijedi da je vjerojatnost da bar dvoje ljudi u grupi od n ljudi ima rođendan istoga datuma dana formulom

$$P(n,d)=1-P'(n,d)=1-\frac{d!}{(d-n)!d^n}. \tag{6}$$

2. Primjena u nastavi

Različiti su načini kako ovaj zanimljiv problem iskoristiti u nastavi. Moguće je organizirati mali projektni zadatak čiji bi opći ciljevi bili (prema (3) i (4)):

- povećati motiviranost učenika za matematiku,
- pobuditi znatiželju i želju za samostalnim istraživanjem i prikupljanjem podataka,
- prepoznati složenost realno postavljenog problema te povezati konkretan problem iz života s matematikom,
- upoznati se s različitim pristupima pronalaženja rješenja jednom problemu,
- uočiti razlike između zaključaka dobivenih iz prikupljenih podataka i potkrijepljenih teorijom,
- moći naučeno primijeniti na slične probleme.

Izvođenje ovakvog projekta pretpostavlja osnovno poznavanje pojmova iz kombinatorike i vjerojatnosti. Čak i ukoliko to nije slučaj, moguće je provesti ovaj projekt, ali uz kratku, dodatnu prethodnu pripremu.

U prvoj fazi projekta svakome učeniku pripremite kratki upitnik (jedan primjer takvog upitnika može se pronaći na internetu, poveznica je navedena u literaturi pod rednim brojem 5) te ih na satu zamolite da bez ikakvog dogovora s bilo kim odgovore na pitanje:

Kolika je vjerojatnost da u grupi od 23 ljudi bar dvije osobe imaju rođendan istog datuma?

Nakon toga ih podijelite u grupe po 2 – 3 učenika (neka bude 10 grupa, ako je moguće) radi usporedbe svojih odgovora te analize početnih uvjeta: je li bitna godina rođenja, koliko ćemo dana u godini promatrati, je li raspodjela rođendana u godini jednolika, tj. ima li svaki dan jednaku vjerojatnost... Nakon grupne i razredne analize postavljenog problema i početnih uvjeta neka učenici isprave svoje predviđanje ako to žele. Sada svakoj grupi zadajte da napravi listu od 23 rođendana (uključujući svoje) te po izboru rođendane članova svojih obitelji. Ukoliko želite projekt odraditi u jednom danu, možete im unaprijed sami prirediti liste s popisom datuma, ili iskoristiti neki od generatora slučajno odabranih datuma koje možete besplatno pronaći na internetu (2) i (5). Zanimljivo bi bilo, ukoliko imate pristup računalnoj učionici, da se oni sami posluže takvim unaprijed odabranim programom.

U sljedećem koraku treba predvidjeti vjerojatnost iz prikupljenih podataka. Tu očekivanu vjerojatnost označimo s $P_o(A)$. Nju možemo dobiti služeći se formulom

$$P_o(A)=\frac{r}{k}, \tag{7}$$

pri čemu je r broj povoljnih lista, odnosno broj lista na kojima postoji bar dvoje ljudi s istim rođendanom, a k je ukupni broj lista koje ste prikupili u razredu, ili ukupan broj eksperimenata generiranih nekim programom. Bitno je da učenici dođu do zaključka da samo na osnovi jedne liste ne možemo predvidjeti traženu vjerojatnost. Moguće je samo zaključiti da na toj listi postoji ili ne postoji bar dvoje ljudi s istim rođendanom te da taj odgovor ne utječe na odgovor za preostale liste, odnosno da su one međusobno nezavisne. Svakako treba istaknuti da bi se povećanjem broja k, tj. broja lista, očekivana vjerojatnost trebala približavati izračunatoj vjerojatnosti.

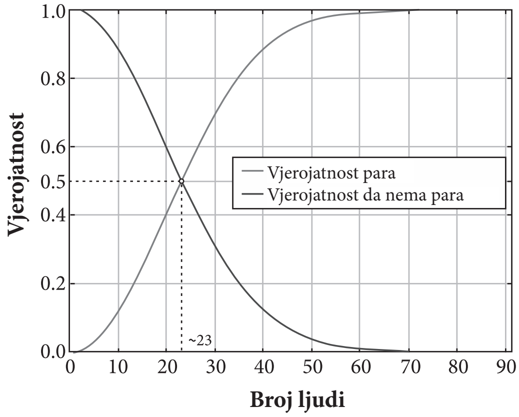
Tada bi trebalo učenicima demonstrirati izračun tražene vjerojatnosti $P(A)$ kako je to pokazano u prethodnom poglavlju. Bilo bi dobro da ih se sugerirajući navede na samostalan zaključak da je jednostavnije izračunati vjerojatnost suprotnog događaja (koji je to događaj?) nego direktno traženu vjerojatnost te u kakvom su međusobnom odnosu ta dva događaja.

I za kraj ovakvog projekta treba analizirati dobivene rezultate eksperimentalnom metodom i pravim izračunom te njih usporediti s početnim predviđanjima učenika, uočiti veća odstupanja predviđenih i dobivenih vrijednosti te ponuditi obrazloženja za takve razlike.

Ukoliko bude mogućnosti, vremena i želje, ovaj osnovni zadatak moguće je proširiti nizom dodatnih aktivnosti. Pregled nekih od njih dan je u nastavku:

1. Zaključak, koji smo već spominjali ranije, da će s povećanjem ljudi u grupi rasti i tražena vjerojatnost bilo bi dobro potkrijepiti primjerima. Može se svakoj grupi dodijeliti zadatak da izračuna vjerojatnost za neki drugi broj ljudi n, $P(n, 365)$. To mogu napraviti služeći se kalkulatorom i općom formulom (6), pri čemu je $d = 365$, ili ako su vam dostupna računala koristeći gotove online besplatne programe napravljene u tu svrhu (2) i (5).

2. Spomenuto je da ljudski mozak ne percipira dobro eksponencijalni rast, stoga bi dobro bilo sve te brojeve prikazati i grafički. U tu svrhu predlaže se skiciranje grafova funkcija $P'(n, 365)$ i $P(n, 365)$ definiranih s (5) i (6). Na osi x neka bude broj ljudi, tj. vrijednost n, a na osi y pripadna vjerojatnost. U istom koordinatnom sustavu možemo skicirati oba grafa, kao na Slici 2, jer je možda tada lakše odgovoriti na pitanje kako bi izgledao graf dobiven kao suma tih dviju vjerojatnosti.



Slika 2. Prikaz vjerojatnosti da bar dvoje ljudi ima rođendan istoga dana i vjerojatnosti da nema dvoje ljudi koji u grupi imaju isti rođendan

Odgovor dobiven na osnovi grafa, $y = 1$, lako je pokazati i koristeći formulu (1).

$$P(n,365)=1-P'(n,365)\Rightarrow P(n,365)+P'(n,365)=1 \qquad (8)$$

Ovdje je dobro mjesto na kojemu se može povezati i nastavno gradivo od prije. Učenici se mogu podsjetiti da primjenom derivacija možemo izračunati u kojoj točki funkcija $P(n, 365)$ najbrže raste, odnosno za koji x funkcija $P'(n, 365)$ najbrže pada.

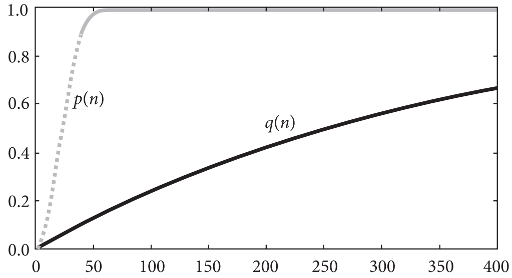
3. Zanimljiv je i nematematički pristup koji paradoks djelomično objašnjava time da ljudi nesvjesno često sebe stavljaju na prvo mjesto, pa postavljajući pitanje o vjerojatnosti barem dvije osobe intuitivno krivo odgovaraju jer nesvjesno sebe automatski promatraju kao jednu od te dvije osobe (obrađeno u literaturi (2) i (6)). Time zapravo rješavaju drugačiji problem, *kolika je vjerojatnost da će netko u grupi od n (ili konkretno kao i do sada 23) ljudi imati rođendan istoga datuma kao i ti?* Označimo ovu vjerojatnost s $q(n)$. Lako se pokaže da vrijedi

$$q(n)=1-\left(\frac{365-1}{365}\right)^n. \qquad (9)$$

Ili općenito za bilo koji broj dana d, vrijedi

$$q(n,d)=1-\left(\frac{d-1}{d}\right)^n. \qquad (10)$$

U slučaju kada je $n = 23$, dobit ćemo da je tražena vjerojatnost $q(23) = 6.1$ %. U ovakvom problemu pokazuje se da najmanji broj n za koji će tražena vjerojatnost (da u promatranoj grupi ljudi još netko ima rođendan istoga datuma kao i ti) biti veća od 50 % iznosi 253. Na Slici 3 očita je razlika u porastu između funkcija kojima prikazujemo obje vjerojatnosti. Vjerojatnost podudaranja rođendana bar dvije osobe puno brže raste u odnosu na vjerojatnost podudarnog rođendana na unaprijed određen datum čiji je rast očigledno sporiji. Na osi x je broj ljudi n, dok je na osi y pripadna vjerojatnost.

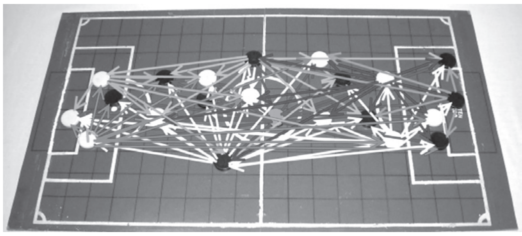


Slika 3.Odnos između vjerojatnosti p(n) = vjerojatnost podudaranja rođendana bar dviju osoba i q(n) = vjerojatnost podudarnog rođendana na unaprijed određen datum

4. Početno pitanje: „Kolika je vjerojatnost da u grupi od 23 ljudi bar dvije osobe imaju rođendan istoga datuma?" može se modificirati tako da glasi:

Koliki je najmanji broj ljudi n za koji će vjerojatnost da u toj grupi bar dvoje ljudi ima rođendan istoga datuma biti veća od 50 %?

Način pristupa problemu i njegovog rješavanja analogan je onome koji smo opisali, ali ga ovdje posebno ističemo jer je možda primjenjiviji u realnome svijetu. Ovdje ćemo izdvojiti izvrstan primjer vezan uz nogomet (7). Autor kaže da je Platini na Europskom nogometnom prvenstvu 2012. godine odlučio darivati na svakoj utakmici posebnom medaljom one igrače iz prve postave obiju ekipa čiji se rođendani podudaraju, nebitno jesu li iz iste ekipe ili protivničke. Na prvenstvu se održava 31 utakmica, a UEFA je procijenila da će im biti dovoljno 10 medalja, odnosno da će se na 5 utakmica pojaviti po jedan par takvih igrača. Hoće li im 10 medalja biti dovoljno?



Slika 4. Slikovito prikazano traženje parova igrača s istim datumom rođendana

Iz formule (6) lako možemo izračunati vjerojatnost da u grupi od 22 igrača (obje ekipe po 11 igrača u prvoj postavi) bar njih dvoje ima rođendan istoga datuma $P(22) = 47.57$ %. Budući da se na prvenstvu igra 31 utakmica, 47.57% od 31 iznosi 14.74. To znači da nakon zaokruživanja možemo reći da će se na 15 od 31 utakmice pojaviti po bar jedan par igrača koji će imati rođendan istoga datuma. Stoga bi prema tim izračunima bilo potrebno kupiti 30 medalja, što je čak tri puta više nego je kupljeno. Budući da je Euro 2012 gotov, lako je zapravo i provjeriti koliko je medalja trebalo biti podijeljeno. Popis utakmica s igračima kojima su se podudarali rođendani možete pronaći na poveznici danoj u literaturi pod brojem 7. Iz popisa je vidljivo da je trebalo 28 medalja, samo 2 manje od izračunate vjerojatnosti.

3. Aproksimacije

U nastavku ćemo dati neke od aproksimacija vjerojatnosti koja se traži u rođendanskom problemu.

1. Aproksimacija eksponencijalnom funkcijom. Znamo da eksponencijalnu funkciju možemo razviti u Taylorov red. Promatrat ćemo zapravo razvoj eksponencijalne funkcije u MacLaurinov red (Taylorov red u slučaju kada je $x_0 = 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{11}$$

Tada za jako mali x, tj. za $x \ll 1$, promatranu funkciju možemo aproksimirati samo s prva dva člana reda:

$$e^x \approx 1 + x. \tag{12}$$

Nadalje, neka je $x = {}^{-a}\!/_{d}$, gdje je $a = 1, \ldots, n-1; n \in \mathbb{N}$, i neka je d broj jednako mogućih rođendana. Tada, zbog prethodne aproksimacije, vrijedi

$$e^{\frac{-a}{d}} \approx 1 + \frac{-a}{d}. \tag{13}$$

Uvrstimo li prethodni izraz, dobit ćemo

$$P'(n,d) \approx 1 \times e^{-1/d} \times e^{-2/d} \times \ldots \times e^{-(n-1)/d} = e^{-(1+2+\ldots+(n-1))/d} = e^{-n(n-1)/2d}. \tag{14}$$

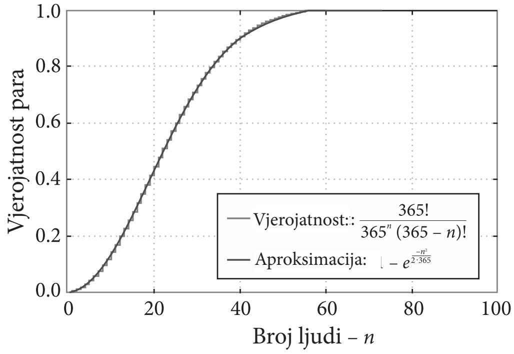
Odatle je

$$P(n,d) = 1 - P'(n,d) \approx 1 - e^{-n(n-1)/2d}. \tag{15}$$

U literaturi se može pronaći još grublja aproksimacija

$$P(n,d) \approx 1 - e^{\frac{-n^2}{2d}}. \tag{16}$$

Ona je prikazana na Slici 5. za slučaj kada je broj dana $d = 365$.



Slika 5. Usporedba funkcije vjerojatnosti P(n) i njezine eksponencijalne aproksimacije

2. Aproksimacija potenciranjem. Već smo prije objasnili da vjerojatnost da dvoje ljudi u grupi od njih n nema rođendan istog datuma iznosi $\frac{364}{365}$. U grupi od n ljudi možemo promatrati kombinacije od

$$C_2(n)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \tag{17}$$

parova, odnosno $C_2(n)$ događaja. Ukoliko pretpostavimo da su ovi događaji nezavisni, tada ćemo vjerojatnost da u grupi od n ljudi nema dvoje koji imaju rođendan istog dana izračunati potenciranjem vjerojatnosti koja vrijedi za jedan par. Međutim, pretpostavka i nije sasvim točna jer ovakvi događaji nisu nezavisni (npr. ako 5. i 7. čovjek imaju rođendan istoga datuma te 7. i 15. čovjek imaju rođendan istog datuma, onda par 5 i 15 nije nezavisan jer znamo da sigurno i oni imaju rođendan istoga dana) te rezultat dobiven na ovakav način nije sasvim točan, ali je često dovoljno dobra aproksimacija.

$$P'(n)\approx\left(\frac{364}{365}\right)^{C_2(n)}. \tag{18}$$

Iz toga slijedi da je tražena vjerojatnost

$$P(n)\approx 1-\left(\frac{364}{365}\right)^{C_2(n)}. \tag{19}$$

Ova metoda prilično je brza za izračun, stoga je primjerena za uvrštavanje u osnovni projekt kao nadopuna objašnjenim metodama. Moguće je učenicima zadati da u grupama izračunaju nekoliko vrijednosti ovako definirane funkcije. Na primjer, po jedan broj ljudi u promatranoj grupi n neka zada nastavnik, a ostale n neka sami izabiru i istražuju mijenja li se i kako točnost ove aproksimacije u odnosu na n.

4. Primjena rođendanskog paradoksa

Rođendanski problem ne samo da je interesantan zbog opisanog paradoksa nego je primjenjiv i u nekim konkretnim problemima, prvenstveno u dijelu informatičkih znanosti koji se bavi kriptografijom i kriptoanalizom (razbijanjem šifri, dekodiranjem, zaobilaženjem sustava autentifikacije, zapravo bilo kojim provaljivanjem kriptiranih podataka). Iz rođendanskog problema proizašao je pojam *rođendanski napad*. On se temelji na proučavanju *hash* funkcije kojom se definira podudaranje u nekom skupu podataka. Tako je vjerojatnost podudaranja podataka analogna vjerojatnosti podudaranja rođendana bar jednom paru, broj ljudi u grupi u ovom je problemu zapravo broj hash elemenata, broj dana analogan je veličini hash prostora (mjereno u bitovima).

Kod problema skupljanja sličica se, uz pomoć rođendanskog paradoksa, može odrediti potreban broj sličica koji se mora prikupiti da bismo s određenom vjerojatnošću rekli da ćemo imati k različitih sličica ili da ćemo popuniti cijeli album. (9)

Iako ne spada u direktnu primjenu, vrijedno je spomenuti da je poznati pisac znanstvene fantastike Arthur C. Clark u svom djelu *Pad mjesečeve prašine* iz 1961. raspravljao upravo o rođendanskom paradoksu i rješenju tog problema.

5. Zaključak

Rođendanski paradoks interesantan je primjer demonstriranja sukobljavanja intuitivnog razmišljanja s matematičkim izračunima. Matematičko obrazloženje rezultata moguće je dati na nekoliko različitih načina i doći do njih kroz nekoliko različitih metoda. Uz poznavanje osnovnih pojmova iz vjerojatnosti i kombinatorike lako se učenicima može izvesti formula koja rješava rođendanski problem. Mijenjanjem varijabli učenici mogu samostalno promatrati promjenu rješenja i ta razmatranja povezati s grafičkim prikazom. Osim toga, upoznat će osnove statističke interpretacije prikupljenih podataka te će moći uspoređivati očekivanu vjerojatnost izračunatu iz dobivenih podataka s pravom vjerojatnošću. Moguće im je ponuditi izračunavanje i približnih vjerojatnosti kroz različite aproksimacije danog problema. U članku su opisane samo dvije aproksimacije, ali postoje i druge. Za napredniju grupu, ovo znanje može se nadograditi generaliziranim rođendanskim problemom, gornjom ogradom tražene vjerojatnosti ili donjom ogradom broja ljudi za koji je uz unaprijed danu vjerojatnost problem zadovoljen.

Literatura:

1. A. DAsGupta, *The matching, birthday and the strong birthday problem: a contemporary review*, Journal of Statistial Planing and Inference 130, (2005.), p. 377-389
2. http://betterexplained.com/articles/understanding-the-birthday-paradox/
3. «Projekt u nastavi matematike srednjih škola" dr. Mirte Benšić, Matematički odjel Sveučilišta u Osijeku http://www.mathos.hr/~mirta/tekst_S.pdf
4. Power Point prezentacija «Projektna nastava matematike" dr. Aleksandre Čižmešije http://www.math.hr/nastava/mnm1/Projekt.ppt
5. http://www.teacherlink.org/content/math/interactive/probability/lessonplans/birthday/home.html
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem
7. http://www.matifutbol.com/en/eurobirthdays.html
8. Weisstein, Eric W. «Birthday Problem." From *MathWorld*-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/BirthdayProblem.html
9. P. Flajolet, D. Gardy, L. Thimonier: *Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search*, Discrite Applied Mathematics, Vol. 39, Issue 3, (1992.), p. 207-229

Izvori slika:

1. Slika 1., Slika 2., Slika 3., Slika 5.: https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem
2. Slika 4.: http://www.matifutbol.com/en/eurobirthdays.html