

IZ NASTAVNE PRAKSE

Primjena metoda aktivnog učenja u poučavanju funkcija više varijabli na tehničkom fakultetu¹

LANA HORVAT DMITROVIĆ² I ANA ŽGALJIĆ KEKO³

Ključne riječi: aktivno učenje, interaktivno predavanje, kviz pitalice, testovi koncepata, funkcije više varijabli

Uvod i motivacija

Utjecaj matematike kao temeljnog kolegija na tehničkim fakultetima sve više raste. Iz činjenice da je primijenjena matematika sadržana u mnogim stručnim kolegijima slijedi da su najvažniji ishodi učenja matematičkih kolegija sposobnost matematičkog modeliranja i vještina rješavanja problema odnosno primjena matematičkog znanja na nove probleme i situacije u praksi. Zato je iznimno važno da studenti u potpunosti svladaju temeljna matematička znanja koja će potom razvijati i primjenjivati u svojoj struci.

Nakon dugogodišnje prakse primijetili smo da studenti matematičkih kolegija imaju velike probleme s dubinskim razumijevanjem koncepata i primjenom naučenog na nove probleme. Također su vidljive velike razlike u motiviranosti studenata za studiranje te razlike u predznanju i sposobnosti za samostalno učenje koja se od njih očekuje na studiju. Naime, u današnje se vrijeme pokazuje da je velik broj studenata izrazito nemotiviran, dok je motivacija nekih studenata usmjerena samo na „prolaz” a ne na želju za usvajanjem novih znanja. To nas je potaknulo na razmišljanje na koji način mi kao nastavnici možemo studentima pomoći u svladavanju navedenih problema te kako poticati njihovu unutrašnju motiviranost za znanjem. Jasno je da pristup poučavanju nastavnika i materijali za učenje igraju veliku ulogu u cijelom procesu.

U tradicionalnim metodama poučavanja naglasak je stavljen na izlaganje gradiva, a studenti na predavanju najčešće imaju ulogu promatrača. Pored toga, studente se potiče na rješavanje velike količine zadataka kako bi time pokazali da su shvatili novo gradivo. Ono što može biti rezultat ovakvog pristupa je da se proces svladavanja određenog matematičkog kolegija svodi na pamćenje teorije i „receptata” prema kojima se rješavaju zadatci. Ukoliko je i način ispitivanja okrenut u tom smjeru, moguće je da nastavnik stekne potpuno pogrešan dojam o studentima, misleći da su dobro savladali gradivo iako

¹Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016., Zagreb

²Lana Horvat Dmitrović, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku, Zagreb

³Ana Žgaljić Keko, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku, Zagreb

su pokazali samo pamćenje temeljnih pojmova bez stvarnog razumijevanja. Također, naučeni „recepti” teško su primjenjivi u stvarnim problemima. Smatramo da studentima treba poslati jasnu poruku o važnosti razumijevanja novonaučenih pojmova i koncepata.

Istraživanja pokazuju da metode aktivnog učenja povećavaju studentsko razumijevanje i rezultate u području znanosti, inženjerstva i matematike. Vidi S. Freeman i ostali (2014.). Danas postoje različite metode aktivnog učenja koje mogu pomoći studentima u dubinskom učenju, što je jedini način za postizanje razumijevanja koncepata, razvoja kreativnog i kritičkog razmišljanja te primjene znanja na nove probleme i situacije. Jedan od najvažnijih izazova prilikom izbora adekvatne metode poučavanja koja potiče aktivno učenje i određivanje načina uključivanja u predavanja iz matematičkih kolegija na nižim godinama tehničkog fakulteta je suočavanje s velikom količinom gradiva i značajnom veličinom grupa od 80 – 120 studenata. U ovom ćemo članku predstaviti neke od metoda koje smatramo da su primjenjive na rad s velikim grupama te smo ih kao takve isprobali i u praksi.

Proučavanjem istraživanja o tehnikama poučavanja koje potiču aktivno učenje u visokoškolskoj nastavi došli smo do zaključka da se metoda suradničkog učenja (engl. *Peer instruction*) koju je prvi uveo profesor E. Mazur s Harvarda najjednostavnije može primijeniti u sklopu predavanja s velikim grupama studenata. Ideja je da prije samog predavanja studenti čitaju unaprijed pripremljeni materijal o gradivu koje će se obrađivati kako bi se na samom predavanju nastavnik mogao više fokusirati na razumijevanje koncepata pomoću ciljanih kviz pitalica popraćenih suradničkim učenjem. Istraživanja pokazuju da ova metoda poboljšava kvalitetu predavanja i studentske rezultate iz kolegija matematičke analize na fakultetu. Vidi članak od R.L. Miller, E. Santana-Vega, M.S. Terrell PhD (2006.). Naravno, navedenu metodu trebalo je prilagoditi našim uvjetima na nastavi te smo za početak počeli s primjenom ciljanih kviz pitalica u sklopu predavanja i izvan njih. Odlučili smo se za korištenje pitanja kao glavnog sredstva za poticanje dubinskog pristupa učenju i razvoju kritičkog mišljenja.

Konkretno, u sklopu visokoškolskih kolegija koji sadrže lekcije iz funkcija više varijabli studenti moraju svladati velik broj novih koncepata kako bi uspješno naučili gradivo. U ovom ćemo radu pokazati jedan od načina kako im pomoći u tome. Želimo pokazati da ubacivanjem ciljanih pitanja s višestrukim odgovorima, s ciljem motiviranja i aktivnog uključivanja studenata u proces poučavanja, možemo poboljšati njihovo razumijevanje te razviti kritičko mišljenje. Pitanja su koncipirana tako da potaknu prisjećanje poznatih znanja, pomognu shvaćanju koncepata te testiraju razumijevanje naučenog. Na predavanju prezentiramo pitanja, studenti odgovaraju dizanjem ruke ili korištenjem online sustava, te međusobno diskutiraju. Dakle, studenti se bave konceptima kroz odgovaranje na pitanja i diskusiju s kolegama i nastavnikom. Također smo u sklopu sustava za e-učenje sastavljali kviz pitalice s gradivom svakog tjedna, koje služe za naknadnu samoprovjeru razumijevanja naučenog.

1. Metode aktivnog učenja u visokoškolskoj nastavi

U zadnjih nekoliko desetljeća došlo je do povećanog istraživanja u području učenja i poučavanja u visokom obrazovanju jer se uočilo da studenti nakon završetka studija nemaju kvalitete koje od njih traži poslodavac, kao što su vještine na brzu prilagodbu,

primjenu znanja u novim situacijama te kritički i kreativni pristup rješavanju problema. Kao posljedica tih istraživanja došlo je do razvoja novih pristupa učenju poput problemski utemeljenog učenja ili aktivnog učenja. U skladu s tim započelo se s proučavanjem modernih metoda poučavanja i njihove povezanosti s pristupima učenju.

Dva opća pristupa učenju su površinski i dubinski pristup učenju. Površinski pristup ima za svrhu rješavanje zadataka, pamćenje šablona za rješavanje, mehaničko povezivanje pojmova, a sve sa svrhom polaganja ispita. Rezultat je nesposobnost donošenja samostalnih zaključaka i primjena naučenog na nove probleme. U fokusu dubinskog učenja je razumijevanje koncepata i problema kroz povezivanje novih i starih znanja, povezivanja različitih područja, povezivanje teorije i prakse, te organizacija sadržaja u smislenu cjelinu. Kao rezultat, učenje se doživljava kao unutrašnja potreba za traženjem smisla. Istraživanja su pokazala da je dubinski pristup učenju uvjetovan metodama poučavanja i utvrđivanja znanja koje potiču aktivan odnos prema gradivu poticajnim i promišljenim poučavanjem, jasno izraženim očekivanjima u vezi s ispitivanjem, mogućnošću uvježbavanja i primjene naučenog u različitim kontekstima.

Sada ćemo razmotriti kako određene metode poučavanja utječu na pristup učenju. Poučavanjem smatramo aktivnosti nastavnika usmjerene prema poticanju studenata na učenje koje će rezultirati razumijevanjem i sposobnošću primjene naučenog. Dakle, osnovna uloga nastavnika je pomoći studentima da nauče. Postoje dva osnovna modela poučavanja, a to su poučavanje usmjereno na prijenos informacija i poučavanje usmjereno na studenta.

Prvi model poučavanja zastupljen je u klasičnom predavanju čiji je cilj prezentacija gradiva i jednosmjerni prijenos znanja s nastavnika na studenta. Pokazalo se da takav model nastave utječe na studenta na način da na kraju studija osoba ima puno znanja i rutinski obavlja poznate zadatke, ali se teško prilagođava promjenama u radnoj situaciji i nema sposobnost kreativnog rješavanja problema.

S druge strane, poučavanje usmjereno na studenta usmjereno je na razumijevanje gradiva odnosno na prepoznavanje i uklanjanje prepreka za studentovo razumijevanje gradiva. U sklopu tog pristupa nastavnik kod studenta potiče sposobnost strukturiranja gradiva i povezivanje s drugim područjima te razmišljanje o dubljem značenju i svrsi gradiva. Kao rezultat ovog načina poučavanja, student je osposobljen za cjeloživotno učenje – sposoban je za formuliranje i rješavanje problema, sklon je kritičkom i kreativnom razmišljanju, spreman na kontinuirano usavršavanje i razvoj svoje profesionalne uloge. Poučavanje usmjereno na studenta primjenjuje se u nastavi kroz niz nastavnih metoda i tehnika koje dovode do aktivnog učenja, a čime se potiče dubinsko razumijevanje gradiva.

Pojam aktivnog učenja razvijen je u sklopu teorije konstruktivizma koja se zasniva na činjenici da je najvažniji činitelj koji djeluje na učenje ono što učenik već zna (vidi Vizek-Vidović, Benge Kletzien, Cota Bekavac, 2005.). Aktivno učenje podrazumijeva samostalnost i samoregulaciju u učenju, razvoj sposobnosti za prepoznavanje bitnog, analizu i usporedbu informacija, njihovo povezivanje s postojećim znanjima te kritičku prosudbu njihovog značenja. Aktivno učenje omogućava studentima da smisljeno pričaju i slušaju, čitaju i pišu, te da razmišljaju o sadržaju, idejama i temama nastavne cjeline. Nastavnik treba iskoristiti principe aktivnog učenja kako bi razvio aktivnosti za studente koje će najbolje reflektirati njegov stil poučavanja i materijala, način razmišljanja

i pristupe nužne za razumijevanje teme. Jedan od glavnih učinaka aktivnog učenja je da studenti duže zadrže stečeno znanje te da mogu primijeniti naučeno u širem kontekstu.

Istraživanja pokazuju da aktivno učenje poboljšava studentski učinak u kolegijima iz STEM područja (znanost, tehnologija, inženjerstvo i matematika). Naime, rezultati pokazuju da aktivnim učenjem manje studenata odustane ili ne položi kolegij, a oni koji polože, pokazuju bolje rezultate iz konceptualnog razumijevanja i rješavanja standardnih ispita. Aktivno učenje pokazalo se djelotvornim na grupama svih veličina, ali su najdjelotvorniji na grupama od najviše 50 studenata. Detaljnije pogledajte u članku S. Freeman i ostali (2014.).

Tijekom zadnja dva desetljeća razvio se velik broj različitih metoda od kojih su neke primjenjivije prirodnim, neke društvenim znanostima; neke su za manje, neke za veće grupe; neke su za osnovnu i srednju školu, neke za fakultete, a neke koriste modernu tehnologiju. Dakle, neke od modernih tehnika puočavanja koje potiču aktivno učenje su: preokrenuta učionica, tok misli, suradničko učenje, igranje uloga, simulacije, učenje rješavanja problema, studije slučaja, diskusije, kvizovi s pitanjima, vizualni i interaktivni materijali i dr.

2. Interaktivna predavanja

Kao najstariji i najrašireniji oblik nastave u visokom obrazovanju, predavanje se smatra bitnom komponentom svakog kolegija. Niz spoznaja utemeljenih na istraživanjima o djelotvornosti predavanja kao oblika nastave dovela su do suvremenog pristupa predavanju. Kao posljedica, u visokoškolskoj nastavi često se koristi metoda interaktivnog predavanja. Naime, metoda izravnog predavanja koja je dominirala u tradicionalnoj nastavi usmjerenoj na prijenos informacija kombinira se s metodama suradničkog učenja, grupne rasprave, problemske nastave i individualnim istraživanjem ili grupnim projektima. Interaktivna predavanja podrazumijevaju visok stupanj interakcije između predavača i studenata, te između studenata i materijala koji se predaje. Zbog nedostatka vremena i slabe motiviranosti studenata sve je teže pronaći vrijeme na satu u kojem studenti kritički razmišljaju i aktivno uče, informacije koje primaju dubinski obrađuju te samostalno razvijaju kritički odnos prema materijalu. Istraživanja su također pokazala da se materijal prezentiran u sredini predavanja pamti slabije od onog prezentiranog na početku ili kraju, pa se interaktivna predavanja koncipiraju tako da se svakih 10 – 15 minuta pred studenta stavljaju novi zahtjevi, da se predavanje podijeli u dijelove koji započinju novim konceptima ili metodama kako bi se osigurala pažnja studenata.

Aktivno sudjelovanje studenata tijekom predavanja treba mijenjati oblike, npr. postavljanjem pitanja koje student najprije obradi sam, a potom uspoređuje svoj odgovor s drugim studentima; traženjem da studenti predviđaju moguće rezultate problema; zahtijevanjem da studenti smisle primjere za pojavu o kojoj je riječ i sl. Smatra se da predavač treba preoblikovati nastavni materijal tako da se uklapa u razinu studentova razumijevanja. Također, utvrđena je i ključna uloga vođenja bilježaka studenata tijekom predavanja: kvalitetne bilješke zahtijevaju obradu primljenih informacija, pomažu pamćenju, održavaju pažnju studenta i nude mu dobar temelj za kasnije utvrđivanje i ponavljanje.

Kao primjer interaktivnog predavanja ovdje ćemo opisati pristup zasnovan na metodi suradničkog učenja (engl. *Peer instruction*). Za detalje o ovoj metodi upućujemo na

literaturu Mazura (1997.). Ova metoda stavlja tradicionalan način izvođenja nastave pred pločom u drugi plan. Prije svakog predavanja pripremaju se nastavni materijali koje studenti moraju pročitati kako bi mogli aktivnije sudjelovati na nastavi. Na samom predavanju predavač se kratko osvrne na materijale koje su studenti trebali pročitati, naglašava potencijalne probleme, produbljuje razumijevanje, gradi studentima samopouzdanje i prezentira dodatne primjere. Glavni cilj metode je kroz predavanja razviti interakciju među studentima i fokusirati studentsku pažnju na osnovne koncepte. Umjesto da se gradivo prezentira detaljno kao što je to u tradicionalnom načinu predavanja, predavanje se sastoji od puno kratkih prezentacija, od kojih je svaka popraćena testovima konceptata odnosno ciljanim pitanjima s višestrukim odabirom o konceptima koji se uče. Takva bi pitanja trebala biti fokusirana na jedan koncept, imati adekvatne ponuđene odgovore, ne bi trebala biti prelagana niti preteška te bi trebala biti nedvosmisleno formulirana.

Prilikom provođenja testova konceptata, nakon jasno postavljenog pitanja, studenti ma se najprije daje vrijeme da se odluče za odgovor. Nastavnik dobiva informaciju o odgovorima studenata elektronski ili tako da studenti podižu ruke. Nakon toga studenti raspravljaju o mogućim odgovorima sa studentima oko sebe te potom ponovno odgovaraju na isto pitanje. Čitav proces provođenja ovakvih testova može se vidjeti u sljedećoj tablici.

		Vrijeme provedbe
1.	Postavljanje i objašnjenje pitanja	1 min
2.	Razmišljanje o odgovoru	1 min
3.	Studenti odgovaraju na pitanja	
4.	Rasprava s kolegama o točnom odgovoru	1 – 2 min
5.	Studenti odgovaraju na pitanje	
6.	Predavačevo objašnjenje odgovora	2 min

Ovakav proces studente tjera da razmisle o argumentima koji su navedeni u pitanjima, te im omogućava način da shvate odgovor uz pomoć svojih suradnika odnosno kolega u predavaonici. Također, predavač na licu mjesta dobiva povratnu informaciju o tome koliko ga je publika razumjela. Ako većina studenata daje točan odgovor na pitanje, predavanje se nastavlja. Ako je razina točnih odgovora mala, predavač uspori i detaljnije objasni koncepte u zadanom pitanju, što svakako pridonosi razvoju komunikacije između nastavnika i studenata, te gradi samopouzdanje studentima. Ovakva pitanja fokusiraju studentsku pažnju na bitno i razbijaju monotoniju pasivnog predavanja. Nadalje, pokazuje se da su studenti bolji u objašnjavanju konceptata jedni drugima nego njihovi nastavnici. Jedno od objašnjenja zašto je to tako je: student koji je razumio koncept kada je pitanje postavljeno tek je nedavno ovladao idejom i još uvijek je svjestan poteškoća u svladavanju navedenog koncepta. Potrebno je naglasiti da ciljana pitanja uzimaju oko jednu trećinu svakog predavanja, čime je ostavljeno manje vremena za klasično predavanje. U tom se slučaju na predavanju može diskutirati samo dio materijala koji spada u gradivo određenog kolegija, smanjiti broj tema koje se obrađuju u semestru ili dati studentima da više sami čitaju. Time se uloga predavača mijenja, odnosno on na neki način preuzima ulogu mentora.

Vjerojatno nije iznenađujuće da bolje razumijevanje koncepata daje bolje rezultate u rješavanju klasičnih zadataka. Istraživanja pokazuju (vidi Mazur (1997.), Miller, Santana-Vega, Terrell (2006.)) da studenti poučavani na ovaj način postižu bolje rezultate u rješavanju klasičnih zadataka u usporedbi sa studentima koji su poučavani na tradicionalan način.

Metodu koju smo opisali djelomično smo primijenili i u vlastitom radu, najviše korištenjem kratkih ciljanih pitanja, o čemu će biti govora u sljedećim poglavljima.

3. Model interaktivne nastave primijenjen na nekoliko cjelina iz funkcija više varijabli

Prilikom osmišljavanja kako primijeniti metode interaktivne nastave na matematičke kolegije prve godine na fakultetu, suočili smo se s nekoliko problema. Jedan od najvažnijih izazova je suočavanje s velikom količinom gradiva i značajnom veličinom grupa od 80 – 120 studenata. Pored toga, na velikim kolegijima pitanje je i velikog broja studenata te nastavnika i asistenata koje sve treba aktivno uključiti u proces.

Kao rezultat tih ograničavajućih faktora, za početak smo ove akademske godine krenuli s upotrebom ciljanih pitanja kao alata za interakciju sa studentima na predavanjima i kviz pitalicama u sustavu e-učenja koja služe za naknadnu samoprovjeru. Interaktivna predavanja realizirali smo pomoću prezentacija u koje smo uključili navedena pitanja. Također, sav je materijal prezentiran u sklopu sustava za e-učenje (*Moodle*). Na nekim smo predavanjima uveli odgovaranje studenata putem online sustava koji služi upravo za tu svrhu (www.auress.org; sustav prezentiran je u radu M. Jagar, J. Petrović, P. Pale (2012.)), što se studentima jako sviđelo jer su mogli odgovarati putem mobilnih telefona te smo odmah prezentirali i komentirali rezultate glasanja. Također smo kod nekih zahtjevnijih pitanja poticali diskusiju i suradničko učenje među studentima. No, veličina grupa i vremenska komponenta značajno su ometale realizaciju suradničkog učenja u većoj mjeri.

Jedan dio pitanja u sklopu predavanja imao je za cilj prisjećanje na poznato gradivo kao uvod u novu temu i sadržaj te motivaciju novog. Drugi dio pitanja koje zovemo testovi koncepata služe za provjeru razumijevanja koncepata i pojmova iz netom izloženog gradiva te njihovo povezivanje i primjenu. Kvizovi za samostalnu provjeru sadrže dijelom računski pitanja, dijelom pametna pitanja koja ispituju razumijevanje naučenog, a dijelom pitanja iz primjene naučenog. Naravno, zastupljena su pitanja različitih težina s obzirom na nivo matematičkog promišljanja koji su studenti upotrijebili te su pokrivala osnovna tri nivoa misaonih operacija: evokaciju, razumijevanje i primjenjivanje.

3.1 Opis karakteristika i tipova pitanja

Prilikom sastavljanja pitanja važno je imati na umu da ona moraju imati barem neke od sljedećih *karakteristika* kako bi pozivala studente na diskusiju o matematici koju uče, te izazivala dublju diskusiju o osnovnim konceptima i idejama:

- stimuliraju motivaciju i znatiželju studenata

- pomažu studentima i nastavniku da razriješe najčešće nejasnoće i zablude
- pomažu studentima da nadgledaju svoje razumijevanje
- omogućavaju studentima česte prilike za donošenje zaključaka i diskusiju o njihovoj istinitosti
- iskorištavaju prijašnje znanje i načine razmišljanja u smislu poveznice s novim gradivom
- omogućavaju nastavnicima alat za čestu službenu procjenu o tome što su studenti naučili
- podržavaju trud nastavnika da gaji okolinu aktivnog učenja

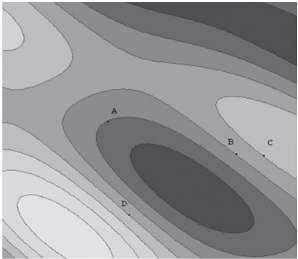
Također, pitanja možemo podijeliti po određenim tipovima vezano uz njihov cilj, zbog čega ih često i zovemo *ciljana pitanja*. Koristili smo sljedeće tipove pitanja: pitanja motivacije i evokacije, pitanja vizualizacije, pitanja motivacije i primjene teorema, te pitanja analogije i usporedbe pojmova. Neke smo tipove preuzeli iz M.D. Schlatter PhD (2002.).

Opisi tipova pitanja

1. Testovi vizualizacije pomažu studentima da brže nauče razmišljati trodimenzionalno, odnosno da bolje razumiju pojmove kroz njihovu geometrijsku interpretaciju. To je posebno važno kod analitičke geometrije, ploha u prostoru i funkcija dviju varijabli.
2. Usporedba – uspoređivanjem pojmova funkcije jedne varijable s pojmovima za funkcije više varijabli (npr. limes i diferencijabilnost)
3. Evokacija – prisjećanje na dosadašnje znanje kako bi se novo znanje povezalo s prijašnjim na ispravan i pravovremen način (npr. znanje iz vektora i analitike u ravnini, funkcija jedne varijable)
4. Analogija – povezivanje analognih pojmova iz različitih područja (npr. Lagrangeov teorem srednje vrijednosti za funkcije u jednoj i više varijabla)
5. Motivacija
 - a. motivacija pojmova i gradiva kroz primjene u praksi (vektori, parcijalna derivacija)
 - b. motivacija definicija ili teorema – koristimo pitanja za pripremanje studenata za novo gradivo (npr. parcijalna derivacija kao uvod u usmjerenu derivaciju)
6. Primjena teorema – razumijevanje pretpostavki i tvrdnji teorema kroz primjene teorema u praksi (Taylorov teorem, Teorem o implicitnom deriviranju, Sylvesterov kriterij)

3.2. Pitanja za poticanje interakcije na predavanjima

Pitanja na nastavi uklopili smo u nekoliko cjelina: analitička geometrija u prostoru, i odabrana poglavlja funkcija više varijabli kao što su plohe u prostoru, nivo krivulje, parcijalne i usmjerene derivacije te ekstremi. Sada ćemo navesti neke primjere pitanja s pripadnim ciljevima unutar predavanja.

<p>Pitanje 1. U kojim sve odnosima mogu biti dvije ravnine?</p> <p>(a) paralelne su (b) sijeku se u točki (c) sijeku se po pravcu (d) nisu paralelne i ne sijeku se</p> <p>Cilj: vizualizacija i evokacija pojma ravnine Napomena. Prije ovog pitanja postavili smo pitanje o odnosima dvaju pravaca u ravnini.</p>	
<p>Pitanje 2. Koja je od sljedećih točaka na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, koja je unutar sfere, a koja izvan sfere?</p> <p>(a) $A(1,2,0)$ (b) $B(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ (c) $C(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$</p> <p>Cilj: povezivanje jednadžbe sfere i položaja točke u prostoru u odnosu na sferu</p>	
<p>Pitanje 3. Presjek plohe $x^2 + y^2 = 2$ i ravnine $z = 2$ je krug. Točno Netočno</p> <p>Cilj: razumijevanje pojma valjkaste plohe i vizualizacija presjeka s ravninom</p>	
<p>Pitanje 4. Skup svih točaka koje su za 2 udaljene od osi z je</p> <p>(a) pravac $x = 2, y = 2$ (b) sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (c) valjak $x^2 + y^2 = 2$ (d) valjak $x^2 + y^2 = 4$</p> <p>Cilj: provjera razumijevanja pojma udaljenosti točke od pravca i vizualizacija ploha drugog reda</p>	
<p>Pitanje 5. Nivo plohe funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ su:</p> <p>(a) kružnice sa središtem u ishodištu (b) sfere sa središtem u ishodištu (c) valjci uzduž osi z (d) gornje polusfere sa središtem u ishodištu</p> <p>Cilj: provjera razumijevanja pojma nivo-plohe funkcije triju varijabli i ploha drugog reda</p>	
<p>Pitanje 6. Parcijalne derivacije predstavljaju brzine promjena funkcije u smjeru koordinatnih osi. Kako možemo poopćiti pojam parcijalne derivacije?</p> <p>Cilj: motivacija i analogija pojma usmjerene derivacije pomoću parcijalne derivacije Pitanje je bilo popraćeno animacijom plohe i presjeka s ravninama u različitim smjerovima.</p>	
	<p>Pitanje 7. U kojoj je od točaka A, B, C, D na slici vektor gradijenta najdulji?</p> <p>(a) A (b) B (c) C (d) D</p> <p>Cilj: razumijevanje geometrijske interpretacije gradijenta kao smjera najbržeg rasta funkcije i povezanost s usmjerenom derivacijom, primjena teorema</p>
<p>Pitanje 8. Koliko lokalnih ekstrema ima funkcija $f(x, y, z) = ax + by + cz$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?</p> <p>(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4</p> <p>Cilj: razumijevanje pojma linearne funkcije i postupka traženja ekstrema na omeđenom skupu</p>	

3.3. Kvizovi za samostalnu provjeru (e-učenje)

Budući da se studenti prvi put susreću s funkcijama više varijabla, u namjeri da im pomognemo u svladavanju gradiva u sustavu za e-učenje pripremili smo „Kratke pitalice” koje smo objavljivali nakon svakog nastavnog tjedna. Kratke pitalice služile su za samoprovjeru naučenog kao i za produbljivanje znanja. U kratkim smo pitalicama naveli točan odgovor uz dodatno objašnjenje zašto je baš tako trebalo odgovoriti.

Prilikom sastavljanja pitanja za takav oblik ispitivanja pretpostavljali smo da je student već ovladao gradivom koje je poslušao na predavanjima i pročitao iz literature. Sad navodimo neke primjere takvih pitanja (slike smo preuzeli iz sustava za e-učenje *Moodle*).

Primjer 1. Cilj: provjera razumijevanja ploha i njihovih odnosa u prostoru

Koji od skupova može biti presjek dviju ploha u prostoru:

Odaberite jedan odgovor:

- kružnica
- točka
- krivulja $x(t) = t, y(t) = 2, z(t) = \ln(t^2)$
- pravac
- sve navedeno ✓

Vaš odgovor je točan.

Evo par primjera: Točka je npr. presjek ploha u prostoru koje se diraju npr. dvije sfere, pravac je presjek dviju ravnina koje se sijeku, kružnica je npr. presjek ravnine paralelne xOy ravnini i kružnog valjka, a krivulja $x(t) = t, y(t) = 2, z(t) = \ln(t^2)$ se može shvatiti kao presjek ravnine $y = 2$ i plohe $z = 2 \ln x$
Ispravan odgovor je: sve navedeno

Primjer 2. Cilj: provjera razumijevanja diferencijabilnosti funkcije više varijabla u točki

Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija više varijabli. Tada vrijedi:

f ima sve parcijalne derivacije u točki $\vec{x} \Rightarrow f$ diferencijabilna u \vec{x}

Odaberite jedan odgovor:

- Točno
- Netočno

Navedena tvrdnja nije točna. Primjer funkcije koja ima sve parcijalne derivacije u točki $(0, 0)$ a nije diferencijabilna u toj točki je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ispravan odgovor je 'Netočno'.

Primjer 3. Cilj: provjera razumijevanja pojma gradijenta funkcije dviju varijabli u točki

Što može biti gradijent funkcije dviju varijabla oblika $z = f(x, y)$ u točki T_0 :

Odaberite jedan odgovor:

- $2\vec{i} + \vec{j}$
- $3x\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
- \times
- $x^2\vec{j} + y\vec{k}$

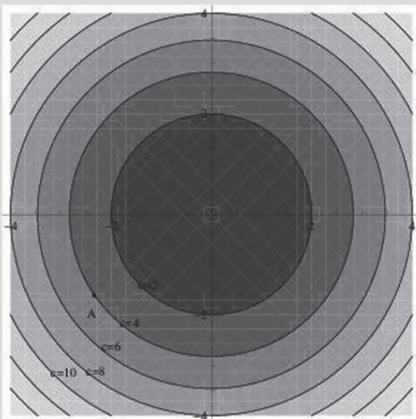
Vaš odgovor nije točan.

Gradijent funkcije $z = f(x, y)$ u točki je konstantan vektor paralelan xOy ravnini, a od ponuđenih odgovora to je jedino vektor $2\vec{i} + \vec{j}$

Ispravan odgovor je: $2\vec{i} + \vec{j}$

Primjer 4. Cilj: povezivanje pojma nivo krivulja i parcijalnih derivacija

Odredi predznake parcijalnih derivacija funkcije $f(x, y)$ u točki A , ako je zadana familija nivo krivulja na slici:



Odaberite jedan odgovor:

- a. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) > 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) < 0$
- b. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) > 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) > 0$
- c. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) < 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) < 0$
- d. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) < 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) > 0$

\times

Vaš odgovor nije točan.

Kada se iz točke A gibamo u smjeru vektora \vec{i} dolazimo na nivo krivulju koja pripada manjoj konstanti C . Također, kada se iz točke A gibamo u smjeru vektora \vec{j} dolazimo na nivo krivulju koja pripada manjoj konstanti C , pa to znači da u tim smjerovima funkcija pada, pa su parcijalne derivacije negativne u toj točki.

Ispravan odgovor je: $\frac{\partial f}{\partial x}(A) < 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) < 0$

Primjer 5. Cilj: razumijevanje i povezivanje pojma nivo krivulja linearne funkcije i derivacije u smjeru

Zadan je kvadrat $ABCD$ i linearna funkcija $f(x, y)$ koja dostiže minimalnu vrijednost na tom kvadratu u samo u točki A . Odredite točke maksimuma.

Odaberite jedan odgovor:

- strana BC
- vrh B
- vrh D
- \times
- vrh C

Vaš odgovor nije točan.

Nacrtamo kvadrat $ABCD$ te nivo pravac kroz točku A koji ne prolazi kroz B i D jer je samo vrh A minimum funkcije. Sada znamo da su ostale nivo krivulje pravci paralelni s tim pravcem kroz A , te znamo da je gradijent funkcije okomit na taj pravac. Iz slike vidimo da je tada maksimum u suprotnom vrhu tj. u vrhu C .

Ispravan odgovor je: vrh C

Primjer 6. Cilj: razumijevanje usmjerene derivacije i nivo krivulja funkcije dviju varijabla

Planina je zadana plohom $z(x, y) = 2000 - 2x^2 - 4y^2$. Pozitivna x -os je usmjerena na istok, a pozitivna y -os na sjever. Planinar je u točki $T(-20, 5, 1100)$. U kojem se smjeru treba kretati ako želi hodati po stazi iste nadmorske visine?

Odaberite jedan odgovor:

- $\vec{i} + 2\vec{j}$
- $\vec{i} + \vec{j}$
- $2\vec{i} - \vec{j}$

Vaš odgovor je točan.

Treba se kretati u smjeru vektora smjera tangente na pripadnu nivo krivulju, koji je okomit na vektor gradijenta. Od predloženih vektora, vektor $\vec{i} + 2\vec{j}$ je jedini okomit na vektor gradijenta.

Ispravan odgovor je: $\vec{i} + 2\vec{j}$

4. Zaključak

Možemo zaključiti da su navedene promjene u nastavi napravile pomak od klasičnog prema interaktivnom predavanju. Nastavnici koji su koristili ciljane pitanja zadovoljni su motivacijom i aktivnošću studenata te osjećaju da su predavanja kvalitetnija, smislenija i studentima korisnija. Studenti su pozitivno reagirali na pitanja na predavanju i na kviz pitalice u sustavu u za e-učenje koja im pomažu da provjere razumijevanje novog gradiva. Smatramo da su ciljane pitanja ispunila svoju svrhu odnosno da ih pitanja potiču na aktivno sudjelovanje i dubinsko promišljanje o novim pojmovima. Pogotovo su im pomogla oko vizualizacije ravnina i ploha u prostoru te geometrijske interpretacije parcijalne i usmjerene derivacije. U daljnjem radu potrebno je dodatno analizirati koncepte s kojima studenti imaju problema kroz cijeli kolegij, pripremiti primjerena ciljane pitanja i kviz pitalice te osmisliti kako u predavanja uključiti još više suradničkog učenja.

Literatura:

1. S. Freeman, S.L. Eddy, M. McDonough, M.K. Smith, N. Okoroafor, H. Jordt, M.P. Wenderoth (2014.): *Active learning increases student performance in science, engineering and mathematics*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, vol. 111 no. 23, 8410-8415, doi: 10.1073/pnas.1319030111
2. M. Jagar, J. Petrović, P. Pale: *AuResS: The Audience Response System*, Proceedings ELMAR- 2012, Zadar, 2012., 171-174
3. E. Mazur: *Peer instructions: A User's Manual*, New Jersey, 1997., Prentice-Hall
4. R.L. Miller, E.Santana-Vega, M.S. Terrell PhD (2006.): *Can Good Questions and Peer Discussion Improve Calculus Instruction?*, Primus, 16:3, 193-203
5. M.D. Schlatter PhD (2002.): *Writing concept tests for a multivariable calculus class*, Primus, 12:4, 305-314, doi: 10.1080/10511970208984036
6. V. Vizek-Vidović, S. Benge Kletzien, M. Cota Bekavac: *Aktivno učenje i kritičko mišljenje u visokoškolskoj nastavi*, priručnik za nastavnike, Forum za slobodu odgoja, Zagreb, 2005.
7. Izvor primjera testova koncepata: <http://mathquest.carroll.edu/libraries/>